



УДК 539.3

**Х.Г. Киямов** – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики

**Н.М. Якупов** – доктор технических наук, профессор кафедры строительной механики, заведующий лабораторией ИММ КазНЦ РАН

**И.Х. Киямов** – соискатель

**Казанский государственный архитектурно-строительный университет**

**С.Н. Якупов** – соискатель

**Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН**

## РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ОБОЛОЧЕК СПЛАЙНОВЫМ ВАРИАНТОМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Для расчета оболочечных конструкций сложной геометрии можно использовать вариант МКЭ, изложенный, например, в работах [1-2]. Метод, благодаря синтезу идеи параметризации и МКЭ, позволяет получать согласованные конечные элементы.

Все соотношения записываются в криволинейной системе координат, которая выбирается на некоторой поверхности отсчета. Компоненты тензора деформации содержат производные второго и третьего порядка от радиус-вектора  $\mathbf{r}$  поверхности отсчета. Если информация о геометрии оболочки задается дискретно, то при вычислении производных от радиус-вектора  $\mathbf{r}$  возникает проблема параметризации, т.е. необходимо задать такую аппроксимирующую функцию, чтобы значения производных третьего порядка находились с достаточной точностью.

Рассмотрим случай среднего изгиба оболочки, для которого, согласно Х.М. Муштари [3], максимальный прогиб одного порядка с толщиной может значительно превосходить ее, но мал по сравнению с другими линейными размерами оболочки. При этом тангенциальные и изгибные деформации для серединной поверхности  $s$  оболочек определяются по формулам [1-3].

$$2e_{ik} = e_{ik} + e_{ki} + w_i w_k \quad c_{ik} = \nabla_i w_k - b_i^s e_{ks} \quad i, k, s = 1, 2$$

$2e_{ik}$  – ковариантные компоненты тензора тангенциальных деформаций;  $c_{ik}$  – ковариантные компоненты тензора деформаций изгиба и кручения;  $w_i = \nabla_i \mathbf{w} + \mathbf{b}_i^k \mathbf{u}_k$  – компоненты вектора поворота нормали  $\mathbf{m}$ ;  $\nabla_i$  – знак ковариантного дифференцирования относительно  $\mathbf{a}_{ik}$ ;  $\mathbf{a}_{ik}$  – компоненты метрического тензора;  $\mathbf{b}_i^s$  – смешанные компоненты второго метрического тензора;  $\mathbf{u}_k, \mathbf{w}$  – ковариантные компоненты вектора перемещения.

Записывая выражения для тангенциальных и изгибных деформаций через перемещения, имеем следующие геометрические соотношения:

$\dot{r}_{11} = \frac{\partial u}{\partial t^1} - \Gamma_{11}^1 u - \Gamma_{11}^2 v - b_{11} w + \frac{1}{2} w_1^2 \Gamma$ $2\dot{r}_{12} = \frac{\partial u}{\partial t^1} + \frac{\partial v}{\partial t^1} - 2\Gamma_{12}^1 u - 2\Gamma_{12}^2 v - 2b_{12} w + w_1 w_2,$ $\dot{r}_{22} = \frac{\partial v}{\partial t^2} - \Gamma_{22}^1 u - \Gamma_{22}^2 v - b_{22} w + \frac{1}{2} w_2^2 \Gamma$	$\dot{r}_{11} = \mathbb{H} \frac{\partial^2 w}{\partial (\partial t^1)^2} + \Gamma_{11}^1 \frac{\partial w}{\partial t^1} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial w}{\partial t^2} - (b_1^2 b_{21} + b_1^1 b_{11}) w$ $-2b_1^1 \frac{\partial u}{\partial t^1} + \left( -\frac{\partial b_1^1}{\partial t^1} + 2\Gamma_{11}^1 b_1^1 + \Gamma_{11}^2 b_2^1 + \Gamma_{12}^1 b_1^2 \right) u$ $-2b_1^2 \frac{\partial v}{\partial t^1} + \left( -\frac{\partial b_1^2}{\partial t^1} + \Gamma_{11}^1 b_1^2 + \Gamma_{11}^2 b_2^2 + \Gamma_{12}^1 b_1^1 + \Gamma_{12}^2 b_2^2 \right) v$
$\dot{r}_{12} = \mathbb{H} \frac{\partial^2 w}{\partial t^1 \partial t^2} + \Gamma_{12}^1 \frac{\partial w}{\partial t^1} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial w}{\partial t^2} - (b_1^1 b_{12} + b_1^2 b_{22}) w$ $-b_2^1 \frac{\partial u}{\partial t^1} + \left( -\frac{\partial b_2^1}{\partial t^1} + 2\Gamma_{12}^1 b_1^1 + \Gamma_{12}^2 b_2^2 + \Gamma_{22}^1 b_1^2 \right) u$ $-2b_2^2 \frac{\partial v}{\partial t^2} + \left( -\frac{\partial b_2^2}{\partial t^2} + \Gamma_{12}^1 b_1^2 + \Gamma_{12}^2 b_2^2 + \Gamma_{22}^1 b_1^1 + \Gamma_{22}^2 b_2^2 \right) v$	$\dot{r}_{22} = \mathbb{H} \frac{\partial^2 w}{\partial (\partial t^2)^2} + \Gamma_{22}^1 \frac{\partial w}{\partial t^1} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial w}{\partial t^2} - (b_2^1 b_{12} + b_2^2 b_{22}) w$ $-2b_2^1 \frac{\partial u}{\partial t^2} + \left( -\frac{\partial b_2^1}{\partial t^2} + \Gamma_{22}^1 b_1^1 + \Gamma_{22}^2 b_2^2 + \Gamma_{12}^1 b_2^1 + \Gamma_{22}^1 b_2^2 \right) u$ $-2b_2^2 \frac{\partial v}{\partial t^2} + \left( -\frac{\partial b_2^2}{\partial t^2} + \Gamma_{22}^1 b_1^2 + 2\Gamma_{22}^2 b_2^2 + \Gamma_{12}^2 b_2^1 \right) v$



При малых деформациях соотношения упругости изотропных оболочек имеют вид [1-3]

$$T_{\epsilon}^{ik} = KE^{ikjs} e_{js}, \quad M_{\epsilon}^{ik} = DE^{ikjs} e_{js} \quad (i, k, j, s = 1, 2),$$

где  $T_{\epsilon}^{ik}$ ,  $M_{\epsilon}^{ik}$  – контравариантные компоненты тензора тангенциальных усилий моментов,  $K=Ed/(1-n^2)$  – жесткость на растяжение-сжатие;  $D=Ed^2/12(1-n^2)$  – изгибная жесткость;  $E^{ikjs}=a^{ij}a^{ks} + n c^{ij}c^{ks}$ ;  $c^{ks}$  – контравариантные компоненты поверхностного дискриминанта тензора;  $c^{11}=0, c^{12}=c^{21}=1/a^{1/2}, a^{ik}=c^{ij}c^{kn}a_{ij}$  – контравариантные компоненты основного метрического тензора;  $d$  – толщина оболочки;  $E$  – модуль упругости;  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

$$\begin{Bmatrix} T_e^{11} \\ T_e^{12} \\ T_e^{22} \end{Bmatrix} = K[B] \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{22} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} M^{11} \\ M^{12} \\ M^{22} \end{Bmatrix} = D[B] \begin{Bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ k_{22} \end{Bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix},$$

$$B_{11} = \frac{\dot{r}_{22}\dot{r}_{22}}{\dot{r}^2}, \quad B_{12} = -\frac{\dot{r}_{12}\dot{r}_{22}}{\dot{r}^2}, \quad B_{13} = \frac{\dot{r}n + \dot{r}_{12}\dot{r}_{12}}{\dot{r}^2},$$

$$B_{23} = \frac{\dot{r}_{11}\dot{r}_{12}}{\dot{r}^2}, \quad B_{22} = -\frac{\dot{r}_{12}\dot{r}_{12} + \dot{r}_{12}\dot{r}_{12} - \dot{r}n}{\dot{r}^2}, \quad B_{33} = \frac{\dot{r}_{11}\dot{r}_{11}}{\dot{r}^2};$$

Формулу для вычисления напряжений можно записать в виде

$$s^{ik} = \frac{E}{1-n^2} [E^{ikjs} (e_{js} + zk_{js})]$$

Для вывода основных разрешающих уравнений воспользуемся вариационным уравнением Лагранжа

$$\iint (T^{ik} de_{ik} + M^{ik} dk_{ik}) \sqrt{f} dt^1 dt^2 = \int_0^1 \int_0^1 [X^1 du + X^2 dv + X^3 dw] \sqrt{f} dt^1 dt^2 +$$

$$+ \int_0^1 (p^{21} du + p^{22} dv + p^2 dw) \sqrt{f_{11}} dt^1 \Big|_{t^2=0}^{t^2=1} + \int_0^1 (p^{11} du + p^{12} dv + p^1 dw) \sqrt{f_{22}} dt^2 \Big|_{t^1=0}^{t^1=1}$$

где  $de_{ik}$ , и  $dk_{ik}$  – вариации соответственно ковариантных компонент тензоров  $e_{ik}$ , и  $k_{ik}$ ,  $X^1, X^2, X^3$  – контравариантные компоненты вектора внешнего поверхностного усилия,  $p^{11}, p^{12}, p^1$  и  $p^{21}, p^{22}, p^2$  – контравариантные компоненты вектора контурных нагрузок.

**Метод решения.** Проводя параметризацию области  $\Omega \in \sigma$  и выразив все векторные и тензорные величины в построенном базисе, задачу определения напряженно-деформированного состояния сводим к классическому виду. При этом вместо сложной области  $\Omega$ , занимаемой срединной поверхностью оболочки, рассматривается каноническая область  $\Omega_{\phi}$  в виде прямоугольника, задаваемого параметрами  $t^1, t^2$ .

В области  $\Omega_{\phi} = [0, T^1] \times [0, T^2]$  введем сетку, использованную на этапе параметризации срединной поверхности оболочки. При формировании матрицы жесткости всей системы необходимо производить численное интегрирование на каждом из прямоугольников  $\Omega_{ij}$  сетки  $\Delta$ , в связи с этим на этапе параметризации поверхности введена более густая сетка  $\Delta_{ij}$ .

Ковариантные компоненты вектора перемещения и их производных  $ij$ -го узла сетки  $\Delta_{ij}$  обозначим через

$$u_{i,j} \quad u_{i,j}^{01} = \frac{\partial u}{\partial t^2} \Big|_{i,j} \quad u_{i,j}^{10} = \frac{\partial u}{\partial t^1} \Big|_{i,j} \quad u_{i,j}^{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^1 \partial t^2} \Big|_{i,j}$$

$$v_{i,j} \quad v_{i,j}^{01} = \frac{\partial v}{\partial t^2} \Big|_{i,j} \quad v_{i,j}^{10} = \frac{\partial v}{\partial t^1} \Big|_{i,j} \quad v_{i,j}^{11} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^1 \partial t^2} \Big|_{i,j}$$

$$w_{i,j} \quad w_{i,j}^{01} = \frac{\partial w}{\partial t^2} \Big|_{i,j} \quad w_{i,j}^{10} = \frac{\partial w}{\partial t^1} \Big|_{i,j} \quad w_{i,j}^{12} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^1 \partial t^2} \Big|_{i,j}$$



Представим решение в каждом из прямоугольников  $\Omega_{ij} = [t_i^1; t_{i+1}^1] * [t_j^2, t_{j+1}^2]$  в виде интерполяционного эрмитового кубического сплайна двух переменных

$$u = j(s^1)F_u j(s^2), \quad v = j(s^1)F_v j(s^2), \quad w = j(s^1)F_w j(s^2),$$

где  $j(s^1) = (j_1(s^1), j_2(s^1), j_3(s^1)h_i, j_4(s^1)h_i) j(s^2) = (j_1(s^2), j_2(s^2), j_3(s^2)h_j, j_4(s^2)h_j)$

$$F_u = \begin{vmatrix} u_{i,j} & u_{i,j+1} & u_{i,j}^{01} & u_{i,j+1}^{01} \\ u_{i+1,j} & u_{i+1,j+1} & u_{i+1,j}^{01} & u_{i+1,j+1}^{01} \\ u_{i,j}^{10} & u_{i,j+1}^{10} & u_{i,j}^{11} & u_{i,j+1}^{11} \\ u_{i+1,j}^{10} & u_{i+1,j+1}^{10} & u_{i+1,j}^{11} & u_{i+1,j+1}^{11} \end{vmatrix}, \quad F_v = \begin{vmatrix} v_{i,j} & v_{i,j+1} & v_{i,j}^{01} & v_{i,j+1}^{01} \\ v_{i+1,j} & v_{i+1,j+1} & v_{i+1,j}^{01} & v_{i+1,j+1}^{01} \\ v_{i,j}^{10} & v_{i,j+1}^{10} & v_{i,j}^{11} & v_{i,j+1}^{11} \\ v_{i+1,j}^{10} & v_{i+1,j+1}^{10} & v_{i+1,j}^{11} & v_{i+1,j+1}^{11} \end{vmatrix},$$

$$j_1(s^1) = (1-s^1)(1+2s^1); \quad j_2(s^1) = (s^1)^2(3-2s^1); \quad j_3(s^1) = (s^1)(1-s^1)^2; \quad j_4(s^1) = (s^1)^2(1-s^1); \quad h_i = t_{i+1}^1 - t_i^1; \quad s^1 = \frac{t^1 - t_i^1}{h_i}$$

$$j_1(s^2) = (1-s^2)^2(1+2s^2); \quad j_2(s^2) = (s^2)^2(3-2s^2); \quad j_3(s^2) = (s^2)(1-s^2)^2; \quad j_4(s^2) = (s^2)^2(1-s^2); \quad h_j = t_{j+1}^2 - t_j^2; \quad s^2 = \frac{t^2 - t_j^2}{h_j}$$

Вводим векторы базовых функции и базовых матриц, состоящих из компонентов скалярного произведения базовых функции. Запишем по правилам матричного умножения векторов и матриц, геометрические соотношения в виде

$$u(s^1, s^2) = j(s^1)F_u j(s^2) = \begin{vmatrix} j_1(s^1)j_1(s^2) & j_1(s^1)j_2(s^2) & j_1(s^1)j_3(s^2)h_j & j_1(s^1)j_4(s^2)h_j \\ j_2(s^1)j_1(s^2) & j_2(s^1)j_2(s^2) & j_2(s^1)j_3(s^2)h_j & j_2(s^1)j_4(s^2)h_j \\ j_3(s^1)h_i j_1(s^2) & j_3(s^1)h_i j_2(s^2) & j_3(s^1)h_i j_3(s^2)h_j & j_3(s^1)h_i j_4(s^2)h_j \\ j_4(s^1)h_i j_1(s^2) & j_4(s^1)h_i j_2(s^2) & j_4(s^1)h_i j_3(s^2)h_j & j_4(s^1)h_i j_4(s^2)h_j \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} u_{i,j} & u_{i,j+1} & u_{i,j}^{01} & u_{i,j}^{01} \\ u_{i+1,j} & u_{i+1,j+1} & u_{i+1,j}^{01} & u_{i+1,j}^{01} \\ u_{i,j}^{10} & u_{i,j+1}^{10} & u_{i,j}^{11} & u_{i,j+1}^{11} \\ u_{i+1,j}^{10} & u_{i+1,j+1}^{10} & u_{i+1,j}^{11} & u_{i+1,j+1}^{11} \end{vmatrix}$$

Таким образом, перемещения  $u(s^1, s^2)$  через величины узловых перемещений записываются как поэлементное умножение двух матриц.

Приведенные соотношения позволяют выразить изгибные деформации и кручения через неизвестные узловые перемещения и их производных.

Вариационное уравнение Лагранжа записывается в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} \int_{t_i^1}^{t_{i+1}^1} \int_{t_j^2}^{t_{j+1}^2} (T_f^{11} de_{r1} + 2T_f^{12} de_{r2} + T_f^{22} de_{r2}) \sqrt{f} dt^1 dt^2 + \\ & + \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} \int_{t_i^1}^{t_{i+1}^1} \int_{t_j^2}^{t_{j+1}^2} (M_f^{11} dk_{r1} + 2M_f^{12} dk_{r2} + M_f^{22} dk_{r2}) \sqrt{f} dt^1 dt^2 = \\ & = \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} \int_{t_i^1}^{t_{i+1}^1} \int_{t_j^2}^{t_{j+1}^2} [X^1 du + X^2 dv + X^3 dw] \sqrt{f} dt^1 dt^2 + \\ & + \sum_{j=1}^{N-1} \int_{t_j^2}^{t_{j+1}^2} (p^{21} du + p^{22} dv + p^2 dw) \sqrt{f} dt^2 \Big|_{t^1=0}^{t^1=1} + \\ & + \sum_{i=1}^{M-1} \int_{t_i^1}^{t_{i+1}^1} (p^{11} du + p^{12} dv + p^1 dw) \sqrt{f} dt^1 \Big|_{t^2=0}^{t^2=1} \end{aligned}$$

Подставляя вариации перемещений и деформаций, учитывая независимость узловых перемещений и их производных, после ряда преобразований получим систему (12MN) алгебраических уравнений вида

$$[A] \{U\} = \{R\}.$$



Здесь {U} вектор неизвестных, {R} вектор нагрузки и нелинейных составляющих, [A] – симметричная матрица жесткости системы ленточной структуры. При этом общую матрицу жесткости [A] собираем из матриц жесткостей каждого конечного элемента размером 48\*48, которые получаем путем интегрирования в каждом конечном элементе.

Решая систему уравнений, находим значения узловых перемещений и их производных. На основе вышеизложенной схемы составлена программа и произведено сравнение с известными решениями.

В качестве тестовой задачи был рассмотрен изгиб заделанной на одном конце балки-пластины длиной L=20 см прямоугольного сечения (ширина b=2см, высота t=1 см) под действием двух сосредоточенных сил, симметрично приложенных перпендикулярно к поверхности пластины в консольной части: P<sub>1</sub>=5кГ и P<sub>2</sub>=5кГ, P=P<sub>1</sub>+P<sub>2</sub> (рис. 1).

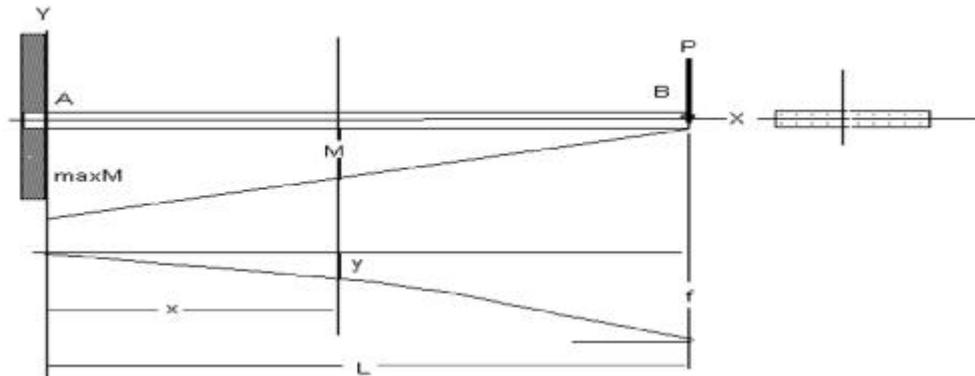


Рис. 1. Расчетная схема для тестирования

Выражение для определения уравнения изогнутой балки прямоугольного сечения в соответствии с соотношениями сопротивления материалов имеет вид

$$M = -P*(L - x), \quad \max M = -P*L, \quad z = \frac{PL^3}{3EJ} \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{x}{L} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{L} \right)^3 \right], \quad f = \frac{PL^3}{3EJ}, \quad j_B = \frac{PL^2}{2EJ}, \quad J = \frac{bt^3}{12},$$

где E – модуль упругости, f – прогиб свободного конца пластины; j<sub>a</sub> – угол поворота конца стержня, z – смещение точки при x.

При расчете E=1000000кГ/см<sup>2</sup>. В таблице 1 приведены результаты расчета прогиба по вышеприведенной формуле, а также результаты расчета по разработанной программе при разбиении рассматриваемой области 11\*5.

Таблица 1

Значения X <sub>j</sub> , см	W <sub>j</sub> см по сопроамату	Значения прогиба по W <sub>j</sub> МКЭ при разных значениях x <sub>i</sub> , y <sub>j</sub>				
		y <sub>1</sub> = -1.0	y <sub>1</sub> = -0.5	y <sub>1</sub> = 0.0	y <sub>1</sub> = 0.5	y <sub>1</sub> = 1.0
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
0.5	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0001	0.0001
1.0	0.0059	0.0005	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005
2.0	0.0023	0.0021	0.0022	0.0023	0.0022	0.0021
4.0	0.0089	0.0087	0.0088	0.0088	0.0088	0.0086
6.0	0.0194	0.0191	0.0192	0.0192	0.0192	0.0192
8.0	0.0331	0.0328	0.0328	0.0329	0.0328	0.0327
12.0	0.0691	0.0684	0.0684	0.0684	0.0684	0.0684
16.0	0.1125	0.1117	0.1117	0.1117	0.1117	0.1117
18.0	0.1360	0.1350	0.1350	0.1350	0.1350	0.1350
20.0	0.1600	0.1588	0.1588	0.1588	0.1588	0.1588

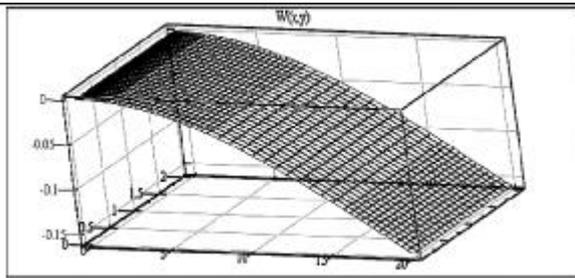


Рис. 2. Прогиб срединной поверхности в изометрии

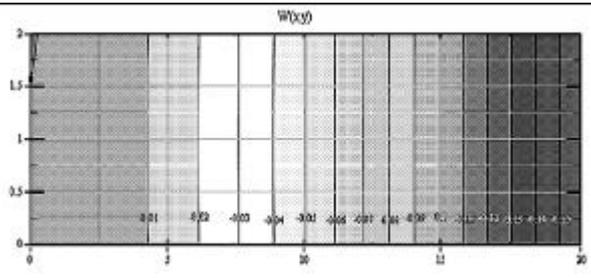


Рис. 3. Прогиб срединной поверхности в плане

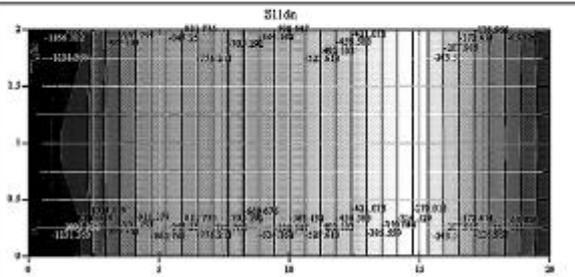


Рис. 4.  $\sigma_{11\phi}$  - распределения напряжения на поверхности пластины

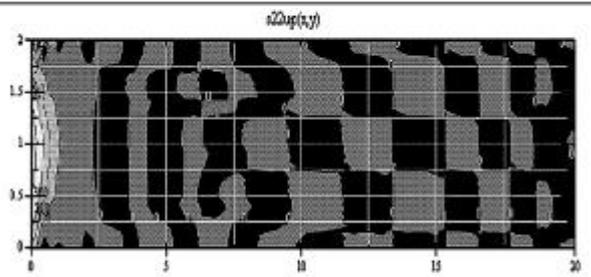


Рис. 5.  $\sigma_{22\phi}$  - распределения напряжения на поверхности пластины

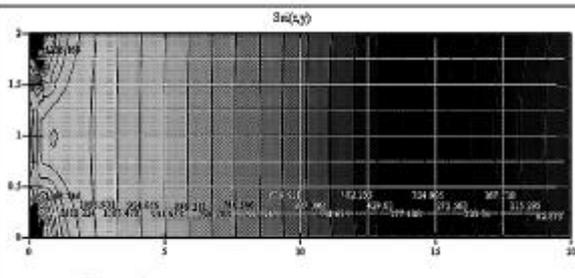


Рис. 6.  $\sigma_{int}$  - распределения напряжения на поверхности пластины

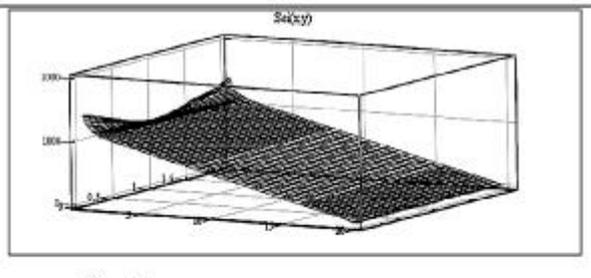


Рис. 7.  $\sigma_{int}$  - распределения напряжения на поверхности пластины

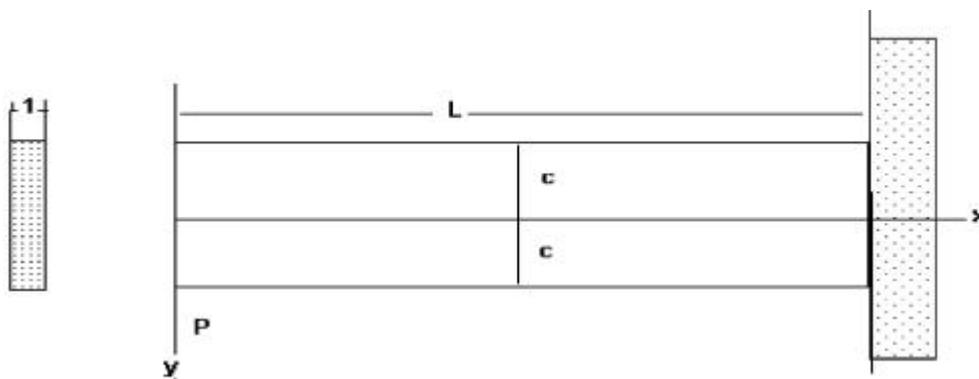


Рис. 8. Расчетная схема поверхности пластины

На рис. 2-6 приведены результаты расчета перемещений  $w$  и напряжений  $\sigma_{11\phi}$ ,  $\sigma_{22\phi}$ , а также интенсивность напряжений  $\sigma_{int}$  на верхней поверхности пластины.

Для сравнения полученных решений с точным решением рассматривался также изгиб балки прямоугольного поперечного сечения единичной толщины, изгибаемой силой  $P=10\text{кг}$ , приложенной на консольной части в плоскости пластины (рис. 8).



Решение для  $u, v, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  для выбранного консольного нагружения при граничных условиях  $u=v=0$  и

$$\left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{\substack{x=L \\ y=0}} = 0 \text{ имеет вид [4]}$$

$$u(x, y) = -\frac{Px^2y}{2EJ} - \frac{nPy^3}{6EJ} + \frac{Py^2}{6JG} + \left( \frac{PL^2}{2EJ} - \frac{Ph^2}{2JG} \right) y,$$

$$v(x, y) = \frac{nPxy^2}{2EJ} + \frac{Px^3}{6EJ} - \frac{PL^2x}{2JE} + \frac{PL^3}{3EJ}; \quad v(x, 0) = \frac{Px^3}{6EJ} - \frac{PL^2x}{2JG} + \frac{PL^3}{3EJ}; \quad v(0, 0) = \frac{PL^3}{3EJ}.$$

Деформации выражаются формулами

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{s_x}{E} = -\frac{Pxy}{EJ}, \quad e_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{ns_y}{E} = \frac{nPxy}{EJ}, \quad g_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{t_{xy}}{E} = -\frac{P}{2JG} (c^2 - y^2),$$

а напряжения на срединной поверхности имеют вид [4]

$$s_x = -\frac{3P}{2c^3} xy, \quad s_y = 0, \quad t_{xy} = -\frac{3P}{4c^3} (c^2 - y^2), \quad J = 2/3 * xy,$$

Результаты расчета  $u(x_i, y_j), v(x_i, y_j)$  в соответствии с теорией [4] и по МКЭ приведены в таблице 2.

Результаты расчета  $u(x, y), v(x, y), \sigma_x(x, y)$  и  $\tau_{xy}(x, y)$  приведены в рисунках 9-19.

Таблица 2

Значения $U(x_i, y_j)$ теория [4]					Значения $U(x_i, y_j)$ по МКЭ				
$y_1=-1.0$	$Y_2=-0.5$	$Y_3=0$	$y_4=0.5$	$y_5=1.0$	$y_1=0$	$y_2=.5$	$y_3=1$	$y_4=1.5$	$Y_5=2.0$
-.00003	-.00001	0	.00001	.00003	0	0	0	0	0
.00013	.00007	0	-.00006	-.00012	.00014	.00006	0	-.00006	-.00014
.00028	.00014	0	-.00013	-.00027	.00027	.00013	0	-.00013	-.00027
.00056	.00028	0	-.00027	-.00054	.00055	.00027	0	-.00027	-.00055
.00107	.00053	0	-.00053	-.00105	.00106	.00053	0	-.00053	-.00106
.00152	.00076	0	-.00075	-.00151	.00151	.00075	0	-.00075	-.00151
.00191	.00095	0	-.00095	-.00189	.00191	.00095	0	-.00095	-.00190
.00251	.00125	0	-.00125	-.00249	.0025	.00125	0	-.00125	-.0025
.00287	.00143	0	-.00143	-.00285	.00286	.00143	0	-.00143	-.00286
.00296	.00148	0	-.00147	-.00294	.00295	.00147	0	-.00147	-.00295
.00299	.00149	0	-.00149	-.00297	.00298	.00149	0	-.00149	-.00298
Значения $V(x_i, y_j)$ теория [4]					Значения $V(x_i, y_j)$ по МКЭ				
$y_1=-1.0$	$Y_2=-0.5$	$Y_3=0$	$y_4=0.5$	$y_5=1.0$	$y_1=0$	$y_2=.5$	$y_3=1$	$y_4=1.5$	$Y_5=2.0$
0.00005	0.00001	0	0.00001	0.00005	0	0	0	0	0
0.00008	0.00005	0.00004	0.00005	0.00008	0.00007	0.00003	0.00002	0.00003	0.00007
0.00019	0.00016	0.00015	0.00016	0.00019	0.00017	0.00014	0.00013	0.00014	0.00017
0.00062	0.00059	0.00058	0.00059	0.00062	0.0006	0.00057	0.00056	0.00057	0.0006
0.00228	0.00225	0.00224	0.00225	0.00228	0.00224	0.00221	0.00221	0.00221	0.00224
0.00489	0.00487	0.00486	0.00487	0.00489	0.00485	0.00482	0.00481	0.00482	0.00485
0.00835	0.00833	0.00832	0.00833	0.00835	0.00829	0.00827	0.00826	0.00827	0.00829
0.0173	0.01728	0.01728	0.01728	0.0173	0.01722	0.01721	0.0172	0.01721	0.01722
0.02817	0.02816	0.02816	0.02816	0.02817	0.02807	0.02806	0.02806	0.02806	0.02807
0.03402	0.03402	0.03402	0.03402	0.03402	0.03391	0.03391	0.03391	0.03391	0.03391
0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.03988	0.03988	0.03988	0.03988	0.03988

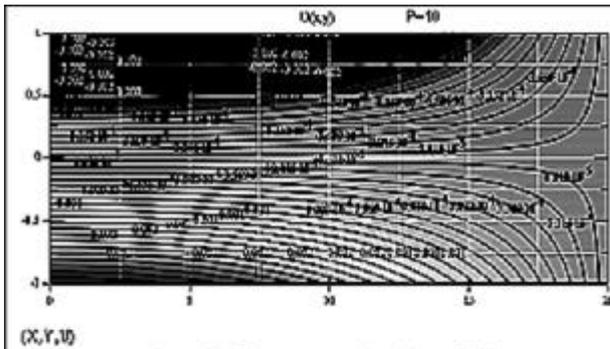


Рис. 9. Значения  $u(x,y)$  по [4]

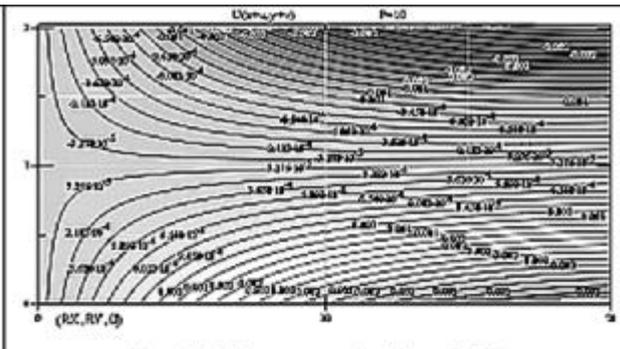


Рис. 10. Значения  $u(x,y)$  по МКЭ

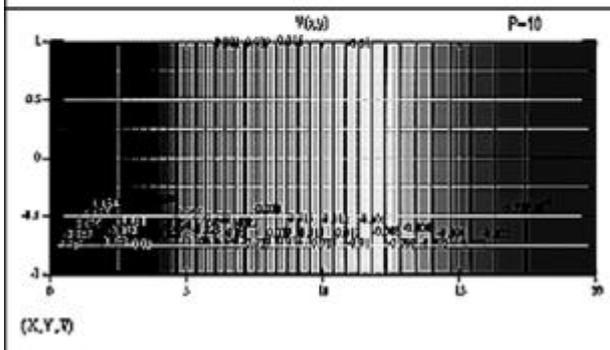


Рис. 11. Значения  $v(x,y)$  по [4]

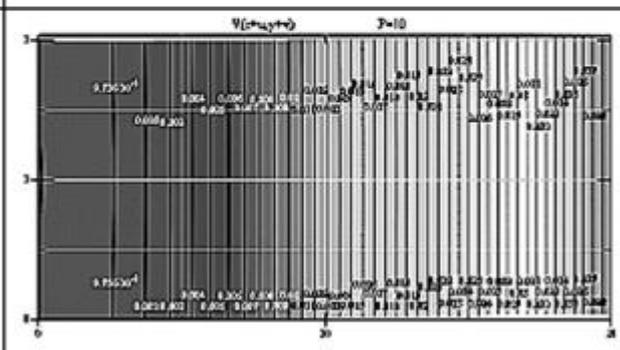


Рис. 12. Значения  $v(x,y)$  по МКЭ

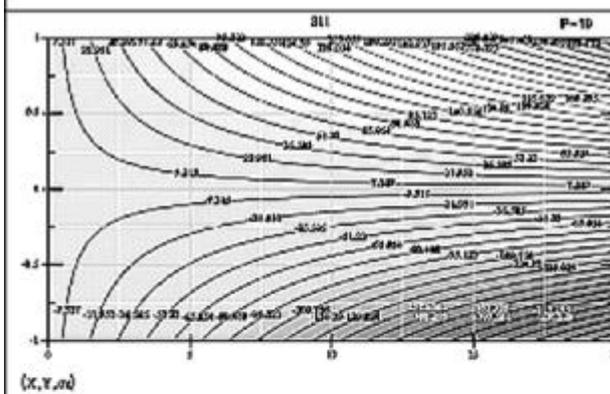


Рис. 13. Значения  $\sigma_x(x,y)$  по [4]

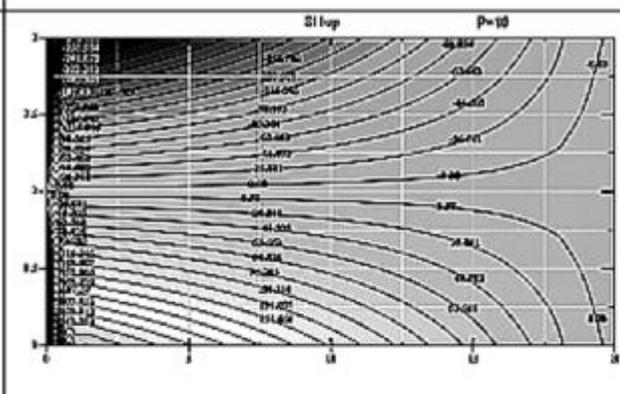


Рис. 14. Значения  $\sigma_x(x,y)$  по МКЭ

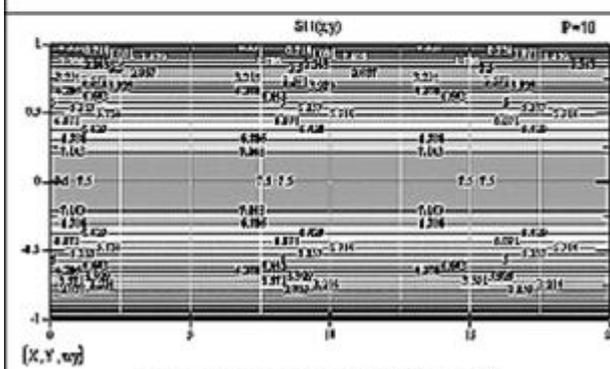


Рис. 15. Значения  $\tau_{xy}(x,y)$  по [4]

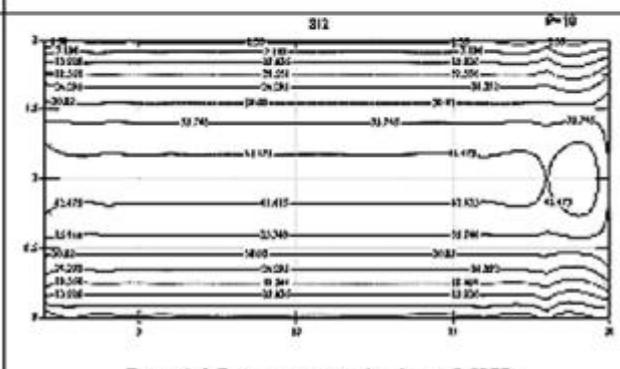


Рис. 16. Значения  $\tau_{xy}(x,y)$  по МКЭ



Таким образом, разработанный программный комплекс позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние тонкостенных конструкций со сложной геометрией.

### **Литература**

1. Якупов Н.М. Об одном методе расчета оболочек сложной геометрии // Исследования по теории оболочек. Тр. семинара. Казань: КФТИ КФАН СССР, 1984. Вып. 17. Ч. II. – С. 4-17.
2. Корнишин М.С., Якупов Н.М. Сплайновый вариант метода конечных элементов для расчета оболочек сложной геометрии // Прикладная механика, 1987. Т.23, № 3. – С. 38-44.
3. Муштари Х.М., Галимов К.З. Нелинейная теория упругих оболочек. – Казань: Таткнигоиздат, 1957. – 432 с.
4. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. Перевод с англ. – Главная редакция физико-математической литературы изд-ва “Наука”, 1975. – 576 с.