УДК 532.5

К.В. Кириллин, Д.А. Петрова, С.И. Филиппов

ОБТЕКАНИЕ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА В ОТКРЫТОМ КАНАЛЕ

Рассмотрим поток идеальной несжимаемой весомой жидкости плотности ρ. Поток, в котором находится круговой цилиндр C, имеет свободную поверхность и ограничен снизу дном на глубине H. В системе координат (рис. 1), связанной с контуром, течение плоскопараллельное, установившееся, потенциальное. Скорость потока на бесконечности равна $-U_0$.

Согласно заимствованному из физики закону Лапласа, увеличение давления при пересечении поверхности жидкости пропорционально средней кривизне этой поверхности, то есть

$$p - p_0 = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \qquad (1)$$

где p – давление внутри жидкости, p_0 – постоянное атмосферное давление, R_1, R_2 – главные радиусы кривизны поверхности, которые будут положительны, если соответствующий центр кривизны находится внутри жидкости, α – коэффициент поверхностного натяжения, величина которого зависит от температуры и физических свойств жидкости. Для плоских движений $R_2 = \infty$ и в формуле (1) имеет место только первое слагаемое, которое для волн малой амплитуды равно $-\alpha\partial^2\eta/\partial x_1^2$, где $\eta(x_1)$ – возвышение свободной поверхности.

Из интеграла Бернулли и условия, что частица жидкости, принадлежащая ее поверхности, остается все время движения на поверхности, получим следующие граничные условия для потенциала вызванных скоростей:

$$U_0\frac{d\eta}{dx_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial y_1} = 0,\ \eta = \frac{U_0}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\alpha}{\rho g}\frac{d^2\eta}{dx_1^2} \qquad (2)$$

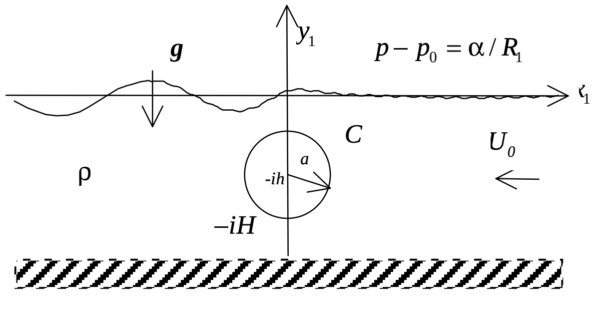

Рис. 1

Введем функцию тока $\psi(x_1, y_1)$, соответствующую потенциалу $\varphi(x_1, y_1)$, тогда первое условие (2) можно записать в виде

$$U_0\frac{d\eta}{dx_1} = \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \quad \text{при} \quad y_1 = 0.$$

Интегрируя его, получим

$$\eta = \frac{1}{U_0}\psi(x_1, 0). \qquad (3)$$

Подставив (3) во второе условие (2), найдем

$$\frac{\alpha}{\rho g}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{U_0^2}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - \psi = 0 \quad \text{при} \quad y_1 = 0. \qquad (4)$$

Введем комплексный потенциал течения $W(z_1) = \varphi(x_1, y_1) + i\psi(x_1, y_1)$, тогда условие (4) можем записать в виде

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha}{\rho g}\frac{d^2W}{dz_1^2} - \frac{U_0^2}{g}\frac{dW}{dz_1} - iW\right) = 0,\ y_1 = 0. \qquad (5)$$

На цилиндре C выполняется условие

$$\mathrm{Im}\,W(z_1) = U_0 y_1 + \psi_0, \quad z_1 \in C, \quad \psi_0 = \mathrm{const}.$$

На дне канала

$$\mathrm{Im}(dW/dz_1) = 0 \qquad (y_1 = -H).$$

Кроме того, должны выполняться условия на бесконечности, обеспечивающие ограниченность скоростей возмущений вне окрестности *C*, и условие излучения волн. Условие излучения будем задавать в соответствии с практическими наблюдениями. Согласно практическим наблюдениям более длинные волны, в образовании которых главную роль играет весомость, развиваются за телом, а более короткие волны, связанные по преимуществу с капиллярностью, распространяются вверх по течению [1]. Отметим, что в противовес чисто капиллярным и чисто гравитационным волнам смешанные волны существуют только при числах Фруда $\mathrm{Fr} \geq \mathrm{Fr}^*$, где Fr^* – некоторое минимальное, отличное от нуля, критическое значение.

Для решения задачи применим метод моделирования поверхностей раздела двойными слоями [2]. Будем отыскивать комплексный потенциал течения в виде

$$W(z_1)=W_\infty(z_1)+\sum_{k=1}^{2}\left[V_k(z_1)+\phi_k(z_1)\right],\quad (6)$$

$$W_\infty(z_1)=-\frac{U_0a^2}{z_1+ih},$$

$$V_1(z_1)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu_1(t_1)}{z_1-t_1}dt_1,$$

$$\phi_1(z_1)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1}\frac{\mu_1(\varsigma_1)d\varsigma_1}{z_1-\varsigma_1},$$

$$V_2(z_1)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu_2(t_2)}{z_1-t_2+iH}dt_2,$$

$$\phi_2(z_1)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2}\frac{\mu_2(\varsigma_2)d\varsigma_2}{z_1-\varsigma_2},$$

$$\varsigma_1(t_1)=-ih+\frac{a^2}{t_1-ih},\quad \varsigma_2(t_2)=-ih+\frac{a^2}{t_2+ih_1},$$

$$h_1=H-h,$$

где контуры L_1 и L_2 получены инверсией линий $y_1=0$ и $y_1=-H$ в окружности C и интегрирование по L_k идет в отрицательном направлении. Представление потенциала в форме (6) позволяет точно удовлетворить условию на контуре.

Плотность распределенных особенностей определяется из условий на свободной поверхности и дне. Подставив комплексный потенциал (6) в (5), получим

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\alpha i}{\rho g}\frac{d^2V_1}{dz_1^{\,2}}-\frac{U_0^2}{g}\frac{dV_1}{dz_1}-iV_1+\frac{\alpha i}{\rho g}\frac{d^2\Omega(z_1)}{dz_1^{\,2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{U_0^2}{g}\frac{d\Omega(z_1)}{dz_1}-i\Omega(z_1)\right\}_{z_1=x_1-i\cdot 0}=0,\quad (7)$$

где $\Omega(z_1)=V_2(z_1)+\phi_1(z_1)+\phi_2(z_1)+W_\infty(z_1)$.

Уравнение (7) при $z_1=x_1$ равносильно следующему:

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\alpha i}{\rho g}\frac{d^2V_1}{dz_1^{\,2}}-\frac{U_0^2}{g}\frac{dV_1}{dz_1}-iV_1-\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha i}{\rho g}\frac{d^2\overline{\Omega}(z_1)}{dz_1^{\,2}}-\frac{U_0^2}{g}\frac{d\overline{\Omega}(z_1)}{dz_1}+i\overline{\Omega}(z_1)\right\}=0.$$

Поскольку теперь под знаком действительной части стоит функция, регулярная в полуплоскости $y_1\le 0$, то она совпадает с чисто мнимой постоянной

$$\frac{\alpha i}{\rho g}\frac{d^2V_1}{dz_1^{\,2}}-\frac{U_0^2}{g}\frac{dV_1}{dz_1}-iV_1+$$

$$+\left(-\frac{\alpha i}{\rho g}\frac{d^2}{dz_1^{\,2}}-\frac{U_0^2}{g}\frac{d}{dz_1}+i\right)\left[\overline{\Omega}(z_1)\right]=c_0i,\quad (8)$$

где c_0 – вещественная постоянная. Не нарушая общности решения, можно положить $c_0=0$. Рассмотрим (8) как дифференциальное уравнение относительно $V_1(z_1)$. Общее решение уравнения можно получить методом вариации постоянных:

$$V_1(z_1)=c_1\exp(s_1z_1)+c_2\exp(s_2z_1),\quad (9)$$

$$s_1=-\frac{\rho U_0^2 i}{2\alpha}\left(1+s_0\right),\quad s_2=-\frac{\rho U_0^2 i}{2\alpha}\left(1-s_0\right),$$

$$s_0=\sqrt{1-4\alpha g/\left(\rho U_0^4\right)},$$

$$c_1(z_1)=\frac{g}{U_0^2s_0}\int\exp\left(-s_1z_1\right)A(z_1)dz_1,$$

$$c_2(z_1)=-\frac{g}{U_0^2s_0}\int\exp\left(-s_2z_1\right)A(z_1)dz_1,$$

$$A(z_1)=\left(\frac{\alpha i}{\rho g}\frac{d^2}{dz_1^{\,2}}+\frac{U_0^2}{g}\frac{d}{dz_1}-i\right)\left[\overline{\Omega}(z_1)\right].$$

Необходимо назначить пределы интегрирования у неопределенных интегралов формул (9). Для этого необходимо применить принятые нами условия излучения волн. Параметр s_1 относится к волнам, в образовании которых основную роль играет капиллярность, поэтому нижний предел интегрирования в формуле для $c_1\left(z_1\right)$ возьмем равным $-\infty$, а верхний предел – равным z_1. Параметр

s_2 характеризует волны, в образовании которых основную роль имеет сила весомости, то есть в формуле для $c_2(z_1)$ нижний предел следует взять равным ∞, а верхний – равным z_1. Таким образом,

$$V_1(z_1) = \frac{g}{U_0^2 s_0} \exp(s_1 z_1) \int_{-\infty}^{z_1} \exp(-s_1 z_1) A(z_1) dz_1 -$$

$$- \frac{g}{U_0^2 s_0} \exp(s_2 z_1) \int_{\infty}^{z_1} \exp(-s_2 z_1) A(z_1) dz_1 .$$

Меняя порядок интегрирования, найдем:

$$V_1(z_1) = \frac{g}{U_0^2 s_0} \left\{ \exp(s_1 z_1) \int_{-\infty}^{z_1} \exp(-s_1\lambda) I(\lambda) d\lambda - \right. \qquad (10)$$

$$- \exp(s_2 z_1) \int_{\infty}^{z_1} \exp(-s_2\lambda) I(\lambda) d\lambda +$$

$$+ \frac{\exp(s_1 z_1)}{2\pi i} \oint_{L_1} \left[\int_{-\infty}^{z_1} \exp(-s_1\lambda) D_1(\lambda, \bar{\varsigma}_1) d\lambda \right] \mu_1(\varsigma_1) d\bar{\varsigma}_1 -$$

$$- \frac{\exp(s_2 z_1)}{2\pi i} \oint_{L_1} \left[\int_{\infty}^{z_1} \exp(-s_2\lambda) D_1(\lambda, \bar{\varsigma}_1) d\lambda \right] \mu_1(\varsigma_1) d\bar{\varsigma}_1 +$$

$$+ \frac{\exp(s_1 z_1)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{z_1} \exp(-s_1\lambda) D_3(\lambda, t_2) d\lambda \right] \mu_2(t_2) dt_2 -$$

$$- \frac{\exp(s_2 z_1)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{z_1} \exp(-s_2\lambda) D_3(\lambda, t_2) d\lambda \right] \mu_2(t_2) dt_2 +$$

$$+ \frac{\exp(s_1 z_1)}{2\pi i} \oint_{L_2} \left[\int_{-\infty}^{z_1} \exp(-s_1\lambda) D_2(\lambda, \bar{\varsigma}_2) d\lambda \right] \mu_2(\varsigma_2) d\bar{\varsigma}_2 -$$

$$\left. - \frac{\exp(s_2 z_1)}{2\pi i} \oint_{L_2} \left[\int_{\infty}^{z_1} \exp(-s_2\lambda) D_2(\lambda, \bar{\varsigma}_2) d\lambda \right] \mu_2(\varsigma_2) d\bar{\varsigma}_2 \right\},$$

$$I(\lambda) = \frac{-2\alpha i U_0 a^2}{\rho g (\lambda - ih)^3} + \frac{U_0^3 a^2}{g(\lambda - ih)^2} + \frac{U_0 a^2 i}{\lambda - ih},$$

$$D_k(\lambda, \bar{\varsigma}_k) = \frac{-2\alpha i}{\rho g (\lambda - \bar{\varsigma}_k)^3} + \frac{U_0^2}{g(\lambda - \bar{\varsigma}_k)^2} + \frac{i}{\lambda - \bar{\varsigma}_k} \quad (k = 1,\ 2),$$

$$D_3(\lambda, t_2) = \frac{-2\alpha i}{\rho g (\lambda - t_2 - iH)^3} + \frac{U_0^2}{g(\lambda - t_2 - iH)^2} + \frac{i}{\lambda - t_2 - iH} .$$

Находя действительную часть предела (10) при $z_1 \to x_1 - i \cdot 0$ с учетом ранее введенного представления для $V_1(z_1)$ (предельный переход в сингулярном интеграле осуществляется по формуле Сохоцкого), выделяя действительную часть полученного выражения и применяя интегрирование по частям, найдем:

$$\mu_1(x_1) = \sigma_1(x_1) + \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x_1, t_1) \mu_1(t_1) dt_1 +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} K_4(x_1, t_2) \mu_2(t_2) dt_2, \qquad (11)$$

$$\sigma_1(x_1) = \frac{2g}{U_0^2 s_0} \mathrm{Re} \left[\frac{\alpha i (\bar{s}_1 - \bar{s}_2)}{\rho g} \frac{U_0 a^2}{x_1 + ih} + \right.$$

$$+ E(\bar{s}_1) \exp(\bar{s}_1 x) \int_{-\infty}^{x_1} \exp(-\bar{s}_1 \lambda) \frac{U_0 a}{\lambda + ih} d\lambda -$$

$$\left. - E(\bar{s}_2) \exp(\bar{s}_2 x_1) \int_{\infty}^{x_1} \exp(-\bar{s}_2 \lambda) \frac{U_0 a}{\lambda + ih} d\lambda \right],$$

$$K_1(x_1, t_1) = -\frac{1}{\pi} \frac{g}{U_0^2 s_0} \mathrm{Im} \left[\frac{\alpha i}{\rho g} (\bar{s}_1 - \bar{s}_2) H_1(x_1, t_1) + \right.$$

$$+ E(\bar{s}_1) \exp(\bar{s}_1 x_1) \int_{-\infty}^{x_1} \exp(-\bar{s}_1 \lambda) H_1(\lambda, t_1) d\lambda -$$

$$\left. - E(\bar{s}_2) \exp(\bar{s}_2 x_1) \int_{\infty}^{x_1} \exp(-\bar{s}_2 \lambda) H_1(\lambda, t_1) d\lambda \right],$$

$$K_4(x_1, t_2) = -\frac{1}{\pi} \frac{g}{U_0^2 s_0} \mathrm{Im} \left[\frac{\alpha i}{\rho g} (\bar{s}_1 - \bar{s}_2) H_2(x_1, t_2) + \right.$$

$$+ \frac{\alpha i (\bar{s}_1 - \bar{s}_2)}{\rho g (x_1 - t_2 + iH)} +$$

$$+ E(\bar{s}_1) \exp(\bar{s}_1 x_1) \int_{-\infty}^{x_1} \exp(-\bar{s}_1 \lambda) (\lambda - t_2 + iH)^{-1} d\lambda -$$

$$- E(\bar{s}_2) \exp(\bar{s}_2 x_1) \int_{\infty}^{x_1} \exp(-\bar{s}_2 \lambda) (\lambda - t_2 + iH)^{-1} d\lambda +$$

$$+E(\bar{s}_1)\exp(\bar{s}_1 x_1)\int_{-\infty}^{x_1}\exp(-\bar{s}_1\lambda)H_2(\lambda,t_2)d\lambda -$$

$$\left.-E(\bar{s}_2)\exp(\bar{s}_2 x_1)\int_{\infty}^{x_1}\exp(-\bar{s}_2\lambda)H_2(\lambda,t_2)d\lambda\right],$$

$$H_k(\lambda,t_k)=\frac{a^2}{(t_k-ih)^2\left[\lambda-\varsigma_k(t_k)\right]},$$

$$E(\bar{s}_j)=-i-\frac{U_0^2}{g}\bar{s}_j+\frac{\alpha i\bar{s}_j^2}{\rho g}\quad (j=1,\ 2).$$

Уравнение (11) очевидно легко привести к безразмерному виду. При этом выделяются число Фруда $\mathrm{Fr}=U_0/\sqrt{ga}$ и число Вебера $\mathrm{We_g}=\alpha/g\rho a^2$.

Из условия на дне, с учетом преобразования системы координат $z_2=z_1+iH$, можно получить второе уравнение для определения μ_k

$$\mu_2(x_2)=\sigma_2(x_2)+\int_{-\infty}^{\infty}K_2(x_2,t_2)\mu_2(t_2)dt_2+ \qquad (12)$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}K_3(x_2,t_1)\mu_1(t_1)dt_1,$$

где ядра $K_2,\ K_3$ и $\sigma_2(x_2)$ имеют вид

$$K_2(x_2,t_2)=-\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\left[\frac{a^2}{(t_2+ih_1)^2 s_3(x_2,t_2)}\right],$$

$$K_3(x_2,t_1)=-\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\left[\frac{a^2}{(t_1+ih)^2 s_4(x_2,t_2)}+\frac{1}{x_2-t_1-iH}\right],$$

$$s_3(x_2,t_2)=x_2-ih_1-a^2/(t_2+ih_1),$$

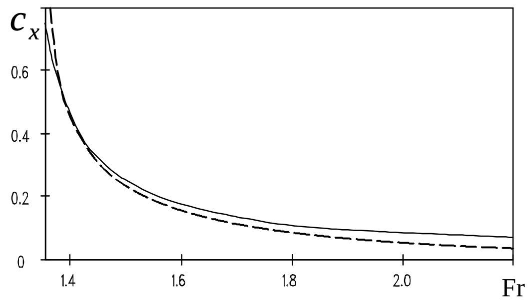

Рис. 2.

$$s_4(x_2,t_1)=x_2-ih_1-a^2/(t_1-ih),$$

$$\sigma_2(x_2)=-2\,\mathrm{Re}\left[W_\infty(x_2)\right].$$

Решение систем интегральных уравнений (11), (12) осуществлялось численно методом последовательных приближений. На рис. 2 представлен пример расчета коэффициента волнового сопротивления кругового цилиндра $c_x=2X/(\rho U_0^2 a)$ в зависимости от числа Фруда при $h/a=4$ и $\mathrm{We_g}=0.806$. Сплошная кривая на рис. 2 соответствует ограниченному потоку при $H/a=8$, а штриховая – неограниченной снизу жидкости. Можно отметить существенное влияние дна на гидродинамические характеристики цилиндра, а также тот факт, что для ограниченного снизу потока критическое число Фруда (Fr^*) имеет меньшее значение.

Работа поддержана РФФИ (проекты № 05-01-00794, 06-01-00155).

Литература

1. Елизаров А.М., Спиридонов О.А., Филиппов С.И. Обтекание подводного контура с образование капиллярно-гравитационных волн // Изв. вузов. Авиационная техника, №2, 2001. – С.15-17.
2. Филиппов С.И. Гидродинамика крылового профиля вблизи границ раздела. – Казань: Изд-во Казанского математического об-ва, 2004. – 200 с.