УДК 621.9

Е.Р. Газизов

АНОДНОЕ ФОРМООБРАЗОВАНИЕ КРИВОЛИНЕЙНЫМ КАТОДОМ ПРИ НЕРАВНОМЕРНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ АНОДА

Разработан численно-аналитический метод расчета анодного формообразования катодом-инструментом с криволинейной границей с учетом неравномерной поляризации анода и пассивирующих свойств электролита.

Для моделирования процесса ЭХО могут быть приняты положения теории “идеального электрохимического формообразования” [1]. Постановки задач ЭХО и методы их решения достаточно полно изложены в монографии [2]. Одно из новых возможных направлений уточнения модели ЭХО – учет неравномерной поляризации электродов, что и было сделано в [3] для катода-инструмента в виде клина. В настоящей работе исследуется учет неравномерной поляризации электродов для криволинейного катода-инструмента.

Постановка задачи и сведение ее к решению нелинейного интегрального уравнения. Требуется определить форму анодной границы Γ_0 при стационарном электрохимическом формообразовании криволинейным катодом-инструментом Γ_1 так, чтобы при этом потенциал электрического поля ψ удовлетворял следующим граничным условиям:

$$\psi = Q \text{ на } \Gamma_1, \quad (1)$$

$$\psi = F_0\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right) \text{ на } \Gamma_0, \quad (2)$$

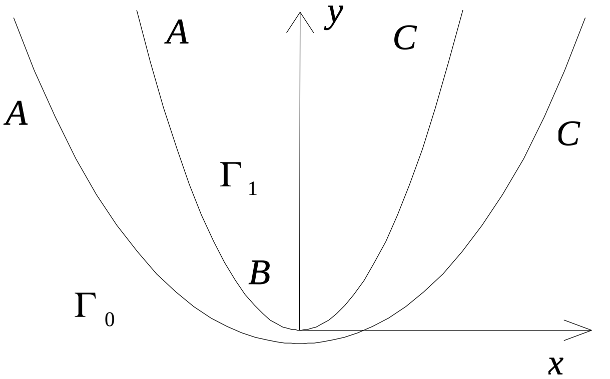

Рис. 1

$$\lambda\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)\frac{\partial\psi}{\partial n} = \cos\theta \text{ на } \Gamma_0. \quad (3)$$

Условие (2) учитывает неравномерную поляризацию анода, а условие (3) - пассивирующие свойства электролита. Здесь θ - угол наклона к оси x касательной к Γ_0; n - нормаль к Γ_0; F_0 - известная функция. Ось x направлена перпендикулярно направлению подачи катода-инструмента. Q – заданное постоянное значение потенциала на Γ_1 (рис.1).

Катод-инструмент Γ_1 задан в виде $\theta = F(S)$, где S - длина дуги.

Разрешим уравнение (3) относительно $\partial\psi/\partial n$, и выразим $\partial\psi/\partial n$ как функцию от θ на Γ_0

$$\partial\psi/\partial n = f_1(\cos\theta). \quad (4)$$

Тогда из (2) выразим ψ на Γ_0 в виде

$$\psi = f_0(\cos\theta). \quad (5)$$

Отобразим конформно область течения в физической плоскости на полосу $D_t = \{0 < \eta < \pi/2\}$ в плоскости комплексного переменного $t = \xi + i\eta$ так, чтобы бесконечно удаленные точки A и C канала перешли в бесконечно удаленные точки полосы слева и справа, соответственно, а точка B – в точку $t = i\pi/2$ (рис. 2). Введем аналитическую функцию $\chi(t) = \ln(dz/dt) = r + i\theta$ и обозначения

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\chi(t) = r^0(\xi), \operatorname{Im}\chi(t) = \theta^0(\xi), t = \xi, -\infty < \xi < \infty, \\ \operatorname{Re}\chi(t) = r^1(\xi), \operatorname{Im}\chi(t) = \theta^1(\xi), t = \xi + i\pi/2, -\infty < \xi < \infty. \end{cases}$$

Если функция $\chi(t)$ найдена, то искомое конформное отображение $z(t)$ определяется интегралом

$$z(t) = \int_0^t \exp(\chi(t))dt,$$

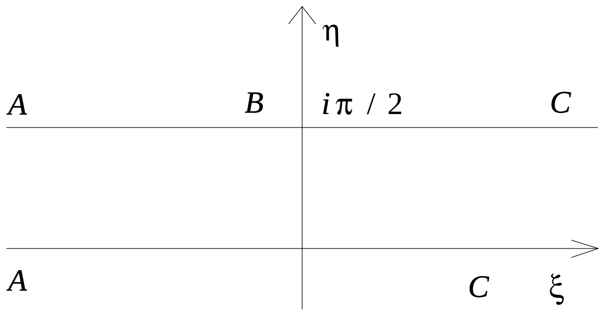

Рис. 2

а форма анодной границы Γ_0 отыскивается в параметрическом виде:

$$x(\xi)=\int_0^{\xi}\exp(r^0(\xi))\cos\theta^0(\xi)d\xi,$$

$$y(\xi)=\int_0^{\xi}\exp(r^0(\xi))\sin\theta^0(\xi)d\xi.$$

Поставим краевую задачу для определения аналитической в области D_t функции $\chi(t)$. На поверхности клина при $\eta=\pi/2$ функция $\chi(t)$ удовлетворяет условию

$$\operatorname{Im}\chi(t)=\theta^1=F(S) \qquad (6)$$

На свободной поверхности (при $\eta=0$) выполняются соотношения (4), (5). С их помощью выведем условие, которому удовлетворяет функция $\chi(t)$ на свободной поверхности. Введем в рассмотрение комплексный потенциал течения $W=\varphi+i\psi$. Для функции $\frac{dW}{dt}=\frac{d\varphi}{dt}+i\frac{d\psi}{dt}$ во вспомогательной области выполняются следующие граничные условия:

$$\operatorname{Im}\frac{dW}{dz}=\frac{d\psi}{dt}=0 \text{ при } t=\xi+i\eta,\ -\infty<\xi<\infty;$$

$$\operatorname{Re}\frac{dW}{dz}=\frac{d\varphi}{dt} \text{ при } t=\xi,\ -\infty<\xi<\infty.$$

Решение смешанной краевой задачи определения в области D_t аналитической функции dW/dt по ее действительной части на нижней границы полосы и ее мнимой части на верхней границе дается формулой:

$$\frac{dW}{dt}=\frac{i}{\pi}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\psi/dt}{ch(\xi-t)}d\xi-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\varphi/dt}{sh(\xi-t)}d\xi\Big).$$

Разделим действительную и мнимую части функции при $t=s$ и найдем выражение, связывающее функции $d\psi/dt$ и $d\varphi/dt$, в операторном виде:

$$\frac{d\psi}{ds}=-B[\gamma], \qquad (7)$$

где $\gamma=d\varphi/d\xi$, B - сингулярный оператор (интеграл понимается в смысле главного значения),

$$B[\gamma]=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\gamma d\xi}{sh(\xi-s)}.$$

Проинтегрировав выражение (7), получим искомую формулу

$$\psi=-CB[\gamma]+\psi(-\infty), \qquad (8)$$

где $\psi(-\infty)$ - потенциал электрического поля на Γ_0 при $\xi\to-\infty$, C - линейный оператор, имеющий вид

$$C[u]=\int_{-\infty}^{\xi}u(\xi)d\xi.$$

Для того, чтобы найти константу интегрирования $\psi(-\infty)$, используем условие (1). Проинтегрировав функцию $d\psi/d\eta$ по вертикальному отрезку, удаленному на $-\infty$, с учетом того, что $d\psi/d\eta=d\varphi/d\xi=\gamma(-\infty)$, найдем $\psi(-\infty)=Q-\pi\gamma(-\infty)/2$. В итоге (8) перепишем в следующем виде:

$$\psi=P[\gamma]+Q, \text{ где } P[\gamma]=-CB[\gamma]-\pi\gamma(-\infty)/2.$$

Известно, что $\partial\psi/\partial n=\partial\varphi/\partial S$, следовательно, учитывая (4) и $dS/d\xi=|dz/dt|=\exp(r^0)$, получим

$$\gamma=d\varphi/d\xi=f_1(\cos\theta^0)\exp(r^0). \qquad (9)$$

Таким образом, учитывая (9), имеем

$$\psi=P[f_1(\cos\theta^0)\exp(r^0)]+Q, \qquad (10)$$

а учитывая (1), получим

$$\psi=f_0(\cos\theta^0). \qquad (11)$$

Скомбинировав (10) и (11), получим условие, которому удовлетворяет функция $\chi(t)$ на свободной поверхности

$$P(f_1(\cos\theta^0)\exp(r^0))+Q=f_0(\cos\theta^0). \qquad (12)$$

Условия (6), (12) определяют нелинейную краевую задачу определения аналитической функции $\chi(t)$ в полосе D_t, которую можно свести к решению системы нелинейных интегральных уравнений.

Предположим, что функция $r^0(\xi)$ известна. Условие $\mathrm{Re}\,\chi(\xi)=r^0(\xi)$ и соотношение (6) представляют собой условия смешанной краевой задачи для аналитической в полосе D_t функции $\chi(t)$: на верхней границе полосы задана мнимая часть $\chi(t)$, на нижней - действительная. Решение такой задачи дается формулой:

$$\chi(t)=\frac{i}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\theta^1(\xi)}{ch(\xi-t)}d\xi-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r^0(\xi)}{sh(\xi-t)}d\xi\right).$$

Разделив действительную и мнимую части функции $\chi(t)$ при $t=s$ в полученном выражении, найдем связь между функциями $r(\xi)$ и $\theta(\xi)$ в операторном виде:

$$\theta^0=A[\theta^1]-B[r^0], \qquad (13)$$

$$r^1=-B[\theta^1]+A[r^0], \qquad (14)$$

где $A[u]=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u d\xi}{ch(\xi-s)}$, а B - определенный ранее оператор.

Так как $S=\int_{-\infty}^{\xi}\exp(r^1)d\xi=C[\exp(r^1)]$, то выражение (6) запишется в виде

$$\theta^1=F(C[\exp(r^1)]) \qquad (15)$$

Воспользовавшись выражениями (13), (14), запишем систему нелинейных интегральных уравнений относительно r^0 и θ^1:

$$f_0(\cos(A[\theta^1]-B[r^0]))=P[f_1(\cos(A[\theta^1]-$$

$$-B[r^0]))\exp(r^0)]+Q, \qquad (16)$$

$$\theta^1=F(C[\exp(-B[\theta^1]+A[r^0])]). \qquad (17)$$

Таким образом, для решения задачи необходимо решить полученную систему уравнений (16)-(17), которая является нелинейной и решается численно методом Ньютона.

Числовые расчеты. Найдена форма детали в случае, когда катод-инструмент имеет форму параболы $y=x^2$ (рис. 3). Для числового расчета использовалась зависимость выхода по току для пассивирующих электролитов, представленная в работе [4]: $\eta(I)=((I-I_{kp})\lambda_{\max})/I, I\ge I_{kp,}$ со следующими значениями параметров: $\kappa=10\,ом^{-1}м^{-1}$

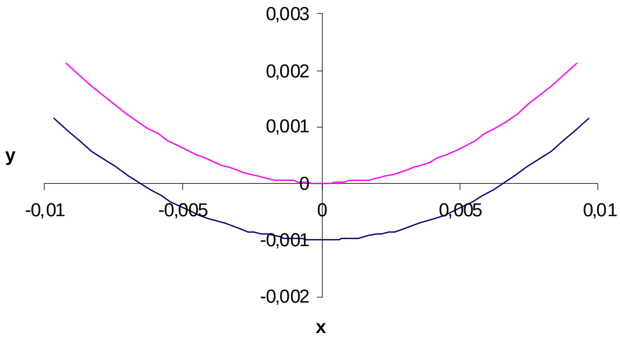

Рис. 3

(электропроводность среды), $\Delta u=12B$ (разность потенциалов), $Q=4\times10^{-4}\,м$ (торцевой зазор), $\lambda_{\max}=2/3$ (максимальный выход по току), $I_{kp}=5\times10^4\,ам^{-2}$ (критическая плотность тока, при которой прекращается электрохимическая обработка). Ток в торцевом зазоре вычислялся по формуле $I_t=\Delta u\kappa/Q$. Таким образом, значение коэффициента выхода по току для I_t равно

$$\eta(I_t)=((I_t-I_{kp})\lambda_{\max})/I_t.$$

Переход к безразмерному виду производится следующим образом:

$$\lambda(I/I_t)=\frac{\eta(I)}{\eta(I_t)}=\frac{I_t(I/I_t-I/I_{kp})}{I(1-I_{kp}/I_t)}.$$

И после введения обозначений $k=I_{kp}/I_t$ и $V=I/I_t$, окончательно получаем безразмерную зависимость в виде

$$\lambda(V)=\frac{V-k}{V(1-k)},$$

которая и использовалась ($k=1/6$). При расчетах принималась зависимость потенциала анода от плотности тока в виде:

$$\psi=\varepsilon\ln(\partial\psi/\partial n)=\varepsilon\ln(F(\cos\theta)),$$

где ε - малый параметр ($\varepsilon=0,01$).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00794).

Литература

1. Житников В.П., Зайцев А.Н. Математическое моделирование трехкоординатной последовательно-строчной электрохимической обработки

непрофилированными электродами-инструментами. Постановка задачи и линейное приближение // Известия вузов. Авиационная техника, №4, 1994. – С. 30 - 37.
2. Каримов А.Х., Клоков В.С., Филатов Е.И. Методы расчета электрохимического формообразования. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1990. – 156 с.
3. Газизов Е.Р., Маклаков Д.В. Анодное формообразование двугранным катодом при неравномерной поляризации анода // Известия вузов. Авиационная техника, №4, 2002. – С. 55-57.
4. Седыкин Ф.В., Орлов В.П., Матасов В.Ф., Соколов Б.М. К вопросу о взаимосвязи между поляризационными явлениями и анодным выходом по току // Технология машиностроения. Электрохимические и электрофизические методы обработки металлов. – Тула: Изд-во Тульского политехнического института, 1976. – С. 3 - 8.