УДК 533.692

Р.Б. Салимов, А.Г. Лабуткин

ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА АЭРОГИДРОДИНАМИКИ В ВИДОИЗМЕНЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ

Крыловой профиль L_Z, расположенный в плоскости $z=x+iy$, обтекается установившимся безвихревым потоком идеальной несжимаемой жидкости (рис. 1а). Пусть $w = j + iy = w(z)$ – комплексный потенциал потока, $v_\infty \exp(ib_\infty)$ – скорость потока на бесконечности. Здесь $\ln w'(z) = \ln v - ib$, где $v = |w'(z)|$ – модуль скорости, b – угол наклона к оси Ох вектора скорости в точке $z = x + iy$.

На участке АКВ контура профиля L_Z задано распределение величины скорости $v = v(j)$ как функции потенциала скорости j, $0 \le j \le j_B$, j_B – заданное число. Здесь для простоты считаем $v = v(j)$ заданной на участке, соединяющем точки А и В разветвления и схода потока.

На участке АМВ контура профиля задан угол наклона к оси Ox вектора скорости как функция потенциала $j : b = b(j)$, $0 \le j \le j_H$, j_H – заданное число. Требуется найти форму контура профиля L_Z и скорость набегающего потока на бесконечности.

Обозначим через s дуговую абсциссу точки профиля, отсчитываемую от точки разветвления потока А в направлении, при котором область течения остается справа. Тогда при $0 \le j \le j_B, 0 \le s \le s_B$ на АКВ имеем $\dfrac{dj}{ds} = v(j), \dfrac{dj}{v(j)} = ds,$

$$s = \int_0^j \frac{dj}{v(j)}, \qquad (1)$$

$s_B = \int_0^{j_B} \dfrac{dj}{v(j)}$. Функция $v(j)$ достаточно явно характеризует распределение скорости на участке АКВ профиля L_Z, т.к. между s и j имеется простая зависимость (1). Пусть $j = j_0(s)$ - функция, обратная к функции (1). Тогда $v = v[j_0(s)]$ - есть зависимость скорости v от дуговой абсциссы точки профиля.

Обозначая через l периметр контура профиля L_Z, получим

$$j_H = \int_{s_B}^{l} v(s)ds, \; j = j(s) = j_H - \int_{s_B}^{s} v(s)ds, \; s_B \le s \le l, \qquad \text{на ВМА,}$$

где: $v = v(s)$ - неизвестное пока распределение скорости на ВМА, l - неизвестная пока величина.

Будем считать $j_B > j_H$.

Функция $w = w(z)$ отображает конформно область D_Z на область D_W в плоскости комплексного переменного $w = j + iy$ (рис. 1б). Область D_ζ в плоскости комплексного переменного $V = r e^{ig}$ $(|V| = r)$, т.е. $|z| > 1$ (рис.1в), на область D_W отображается функцией [1] (с. 98), [2]

$$w = w(z) = -U_0\left(z + \frac{1}{z}\right) + \frac{j_B - j_H}{2pi}\ln z + C,$$

где

$$C = \frac{1}{2}\left(j_B - \frac{j_B - j_H}{2}\right), 2U_0 \sin g_A + \frac{j_B - j_H}{2p} = 0,$$

$$ctg\, g_A = -g_A - p\left(\frac{j_B}{j_B - j_H} - \frac{1}{2}\right).$$

Обозначим $g_B = p - g_A$,

$$j_1(g) = \frac{j_B - j_H}{2p}\left(\frac{\cos g}{\sin g_A} + g\right) + \frac{1}{4}(j_B + j_H), g_B - 2p < g < g_B.$$

Будем считать, что $-\dfrac{p}{2} < g_A < \dfrac{p}{2}, g_A \ne 0.$

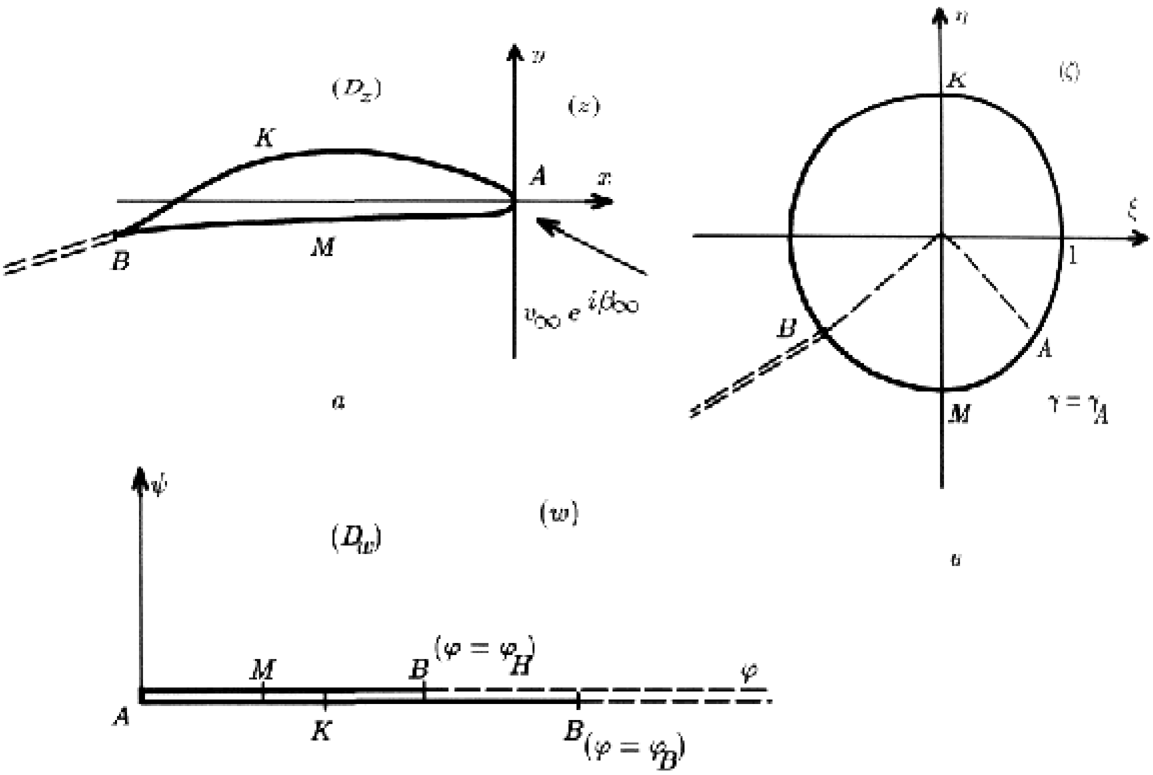

Рис.1

При $j = j_1(g), g_A \le g \le g_B$ из формулы (1) получим $s(g) = \int\limits_0^g \frac{j_1'(g)dg}{v[j_1(g)]}$. Производная этой функции, с учетом предыдущих формул, будет равна

$$s'(g) = \frac{j_B - j_H}{2p}\left(-\frac{\sin g}{\sin g_A}+1\right)/$$
$$/v[j_1(g)], g_A \le g \le g_B. \qquad (2)$$

Зависимость $s = s(g)$ для интервала $(g_B - 2p, g_A)$ будет определена ниже, ее производная выражается формулой, аналогичной предыдущей:

$$s_g' = \frac{j_B - j_H}{2p}\left(-\frac{\sin g}{\sin g_A}+1\right)/$$
$$/\ v[s(g)], \quad g_B - 2p < g < g_A. \qquad (3)$$

Пусть $z = z(z\,)-$ функция, отображающая конформно область $|z\,| > 1$ на область D_z и определяемая из соотношений $w = w(z), w = w(z\,)$.

Таким образом, на участке АКВ окружности $z = \exp(ig)$ известны значения

$$\operatorname{Re}\ln w_Z'[z(\exp(ig))] = \ln v[j_1(g)],$$
$$g_A < g < g_B,$$

на участке ВМА - значения

$$\operatorname{Im}\ln w_Z'[z(\exp(ig))] = -b[j_1(g)],$$
$$g_B - 2p < g < g_A,$$

т.е. приходим к смешанной краевой задаче для аналитической в области D_z функции $\ln w_Z'[z(z\,)]$.

Из формулы, дающей решение этой задачи, получим

$$R(g_0)\frac{1}{2p}\left(\int\limits_{g_B-2p}^{g_A} b[j_1(g)]+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{g_A}^{g_B}\ln v[j_1(g)]\right)\frac{1}{R(g)}\cdot\frac{dg}{\sin\frac{g-g_0}{2}} =$$

$$= \begin{cases}\ln v[s(g_0)], g_B - 2p < g_0 < g_A, \\ -b[s(g_0)], g_A < g_0 < g_B,\end{cases} \qquad (4)$$

где $R(g) = \left|\sin\frac{g-g_A}{2}\right|^{\frac{1}{2}}\left|\sin\frac{g-g_B}{2}\right|^{\frac{1}{2}}$.

В интервале $g_B - 2p < g_0 < g_A$ по этой формуле найдем функцию $v[s(g_0)] = v_1(g)$, затем, учитывая (3), определим

$$s(g) = s_B + \int_{g_B-2p}^{g} \frac{j_B - j_H}{2p}\left(\frac{\sin g}{\sin g_A} - 1\right)\frac{dg}{v_1(g)}, \quad g_B - 2p < g < g_A, \qquad (5)$$

и найдем $v(s) = v_1[g(s)]$, где $g(s)$ функция, обратная к (5), также определим $l = s(g_A)$.

Комплексные координаты точек искомого контура профиля L_z определяются формулами:

$$z(\exp(ig_0)) = -\int_{g_A}^{g_0}\exp[ib(j_1(g))]s'_g\,dg,$$

$$g_B - 2p < g_0 < g_A \qquad \text{(на ВМА)},$$

$$z(\exp(ig_0)) = \int_{g_A}^{g_0}\exp[ib(s(g))]s'_g\,dg,$$

$$g_A < g_0 < g_B \qquad \text{(на АКВ)}.$$

Контур профиля L_z будет замкнутым, если $z(\exp(ig))\big|_{g=g_B} = z(\exp(ig))\big|_{g=g_B-2p}$, т.е.

$$\int_{g_A}^{g_B}\exp[ib(s(g))]s'_g\,dg - \int_{g_B-2p}^{g_A}\exp[ib(j_1(g))]s'_g\,dg = 0.$$

Последнее условие замкнутости контура равносильно следующему [1]:

$$\int_{g_B-2p}^{g_B}\exp(ig)\ln s'_g\,dg = 0, \qquad (6)$$

т.к. при этом в области $|z|>1$ однозначна функция

$z(z) = \int_{\exp(ig_A)}^{z}\exp[\ln z'(z)]\,dz$, в которой

$$\ln z'(z) = -\frac{1}{2p}\int_{g_B-2p}^{g_B}\ln s'_g\,\frac{\exp(ig)+z}{\exp(ig)-z}\,dg,$$

поскольку вычет функции $\exp[\ln z'(z)]$ в точке $z=\infty$ равен нулю.

В формулу (3) подставим выражение для $v[s(g)], g_B - 2p < g < g_A$, определяемое формулой (4). Полученное выражение и (2) подставим в формулу (6), тогда при $j_B > j_H$ $(g_A < 0)$ условие (6) замкнутости L_Z примет вид

$$\int_{g_B-2p}^{g_A} e^{ig}\ln\left(\frac{\sin g}{\sin g_A}-1\right)dg + \int_{g_A}^{g_B}e^{ig}\ln\left(1-\frac{\sin g}{\sin g_A}\right)dg - \int_{g_A}^{g_B}e^{ig}\ln v[s(g)]\,dg -$$

$$-\int_{g_B-2p}^{g_A}e^{ig_0}\left[R(g_0)\frac{1}{2p}\left(\int_{g_B-2p}^{g_A}b[j_1(g)] + \int_{g_A}^{g_B}\ln v[j_1(g)]\right)\frac{1}{R(g)}\cdot\frac{dg}{\sin\frac{g-g_0}{2}}\right]dg_0 = 0. \qquad (7)$$

Скорость $v_\infty e^{ib_\infty}$ набегающего потока в плоскости z определяется по формулам:

$$\ln v_\infty = \frac{1}{2p}\int_{g_B-2p}^{g_A}\ln v_1(g)\,dg + \frac{1}{2p}\int_{g_A}^{g_B}\ln v[j_1(g)]\,dg,$$

$$b_\infty = \frac{1}{2p}\int_{g_B-2p}^{g_A}b[j_1(g)]\,dg + \frac{1}{2p}\int_{g_A}^{g_B}b[s(g)]\,dg.$$

Чтобы добиться выполнения условий (7), на участке ВМА будем считать $b(j)$ заданной в виде

$$b(j) = p_1 b_1(j) + p_2 b_2(j) + p, \quad 0 \le j \le j_H, \qquad (8)$$

где j_H - заданное число, $b_1(j), b_2(j)$ - заданные функции, удовлетворяющие условию Гёльдера. Постоянные p_1 и p_2 подберем так, чтобы выполнялись условия (7).

Рассмотрен пример, когда функция $b(j)$ на нижней поверхности задана формулой (8). Программа составлена на алгоритмическом языке FORTRAN PowerStation с использованием стандартных подпрограмм вычисления определенных интегралов и интегралов с особенностями DQDAGS, DQDAWS, DQDAWC. При этом было задано

$b_1(j)=j_H/2-j$, $b_2(j)=(j_H/2-j)^2$ при $0\le j\le j_H$. Скорость $v(j)$ на верхней поверхности была задана в виде:

$$v(j)=v(0)+\frac{j}{j_m}(m-v(0)),\ 0\le j\le j_m;$$

$$v(j)=m,\ j_m\le j\le j_m^*;$$

$$v(j)=m+\frac{n-m}{j_n-j_m^*}(j-j_m^*),\ j_m^*\le j\le j_n;$$

$$v(j)=n+\frac{v(j_B)-n}{j_B-j_n^*}(j-j_n^*),\ j_n^*\le j\le j_B.$$

Было задано $j_B=28.0$, $j_H=20.0$, $v(0)=0.9, v(j_B)=0.8$, $m=1.1, n=1.0$, $j_n=j_B/2+0.1$, $j_n^*=j_B-0.2$. В результате расчетов получено $g_A=-0.1069$, $p_1=0.3213$, $p_2=-0.0489$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тумашев Г.Г., Нужин М.Т. Обратные краевые задачи и их приложения. - Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1965. - 333 с.
2. Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В. Обратные краевые задачи аэрогидродинамики. - М.: Физматлит, 1994. - 436 с.