УДК 624.04

Г.Н. Дмитриев, Е.Г. Михайлова

К ПОСТРОЕНИЮ ФУНКЦИИ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ УСТОЙЧИВОСТИ НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК

Вопросы расчета устойчивости простых неразрезных балок с одним или двумя защемлениями рассмотрены во многих работах. Однако особенности расчета устойчивости консольно-неразрезных балок в известных работах освещены недостаточно. Анализу изменения свойств неразрезных балок при изменении технических и эксплуатационных параметров посвящено еще меньше работ.

На рис. 1 приведена схема исследуемой консольно-неразрезной балки с защемлением.

Здесь: $L_i, EI_i, i=1(1)n$ - длины и жесткости консольной части и пролетов; $a_{pi}, i=1(1)n$ - безразмерные эксплуатационные параметры; P - общий параметр нагрузки.

На рис. 2 приведена основная система метода перемещений консольно-неразрезной балки с защемлением.

Число основных неизвестных: углов поворота фиктивных защемлений $Z_i, i=1(1)(n-1)$ и линейного перемещения в направлении фиктивной опоры 0 в конечном сечении консоли, определяет степень кинематической неопределимости рассматриваемой неразрезной балки, равной n.

Каноническое уравнение метода перемещений в расчете на устойчивость в матричной форме запишется в виде:

$$\boldsymbol{RZ} = \boldsymbol{0}\,, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{R}$ - квадратная матрица жесткости неразрезной балки, элементы $r_{ij}, i, j = 0(1)(n-1)$ которой являются коэффициентами канонических уравнений, $\dim \boldsymbol{R} = n,\ \boldsymbol{Z} = colon[Z_i],\ i = 0(1)(n-1)$ - вектор основных неизвестных перемещений.

Элементы матрицы $\boldsymbol{R}$, являющиеся реакциями в введенных фиктивных связях, находят, рассматривая равновесие узлов или отсеченной части балки при деформациях, соответствующих единичным углам поворотов $Z_i, i=1(1)(n-1)$ либо единичному смещению узла $Z_0 = 1$. Они выражаются через погонные жесткости пролетов основной системы i_i, технические параметры a_{li}, a_{ei} и базовые величины EI, L ($i_i = \dfrac{EI_i}{L_i},\ EI_i = a_{ei}EI,\ L_i = a_{li}L$):

$$\left.\begin{aligned}
&r_{00} = \frac{3ia_{e1}}{L^2 a_{l1}^3}\cdot m_8^*(l_1),\ r_{01} = r_{10} = -\frac{3ia_{e1}}{La_{l1}^2}\cdot m_7^*(l_1),\\
&r_{11} = \frac{3ia_{e1}}{a_{l1}}\cdot m_7^*(l_1) + \frac{4ia_{e2}}{a_{l2}}\cdot m_1^*(l_2),\\
&r_{i,i+1} = r_{i+1,i} = \frac{2ia_{ei}}{a_{li}}\cdot m_2^*(l_i),\ i = 1(1)(n-1),\\
&r_{ii} = \frac{4ia_{ei}}{a_{li}}\cdot m_1^*(l_i) + \frac{4ia_{e,i+1}}{a_{l,i+1}}\cdot m_1^*(l_{i+1}),\\
&i = 2(1)(n-1).
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

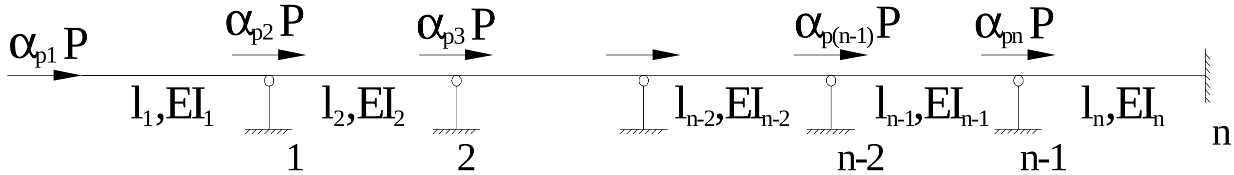

Рис.1

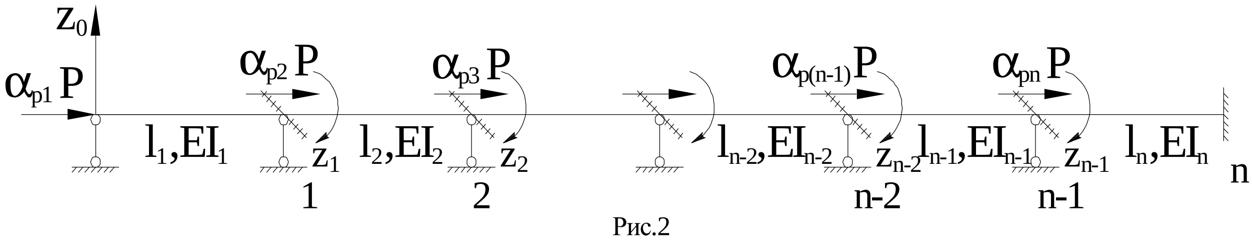

Рис.2

Для сжатого стержня со смещениями узлов реакции в связях зависят не только от смещений, но и от продольной силы. Вычисление их сложно, влияние продольной силы учитывается безразмерным параметром l_i, $l_i = \sqrt{\dfrac{N_i}{EI_i}} \cdot L_i$, где N_i, EI_i, L_i - продольно-сжимающая сила, жесткость и длина i - го пролета основной системы, соответственно.

Параметры сжатия каждого пролета l_i можно определить через общий безразмерный параметр l :

$$l_i = b_i l,\ b_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{i} a_{pj}}{a_{ei}}} \cdot a_{li}, \quad i = 1(1)n,\ l = \frac{EI}{L}. \tag{3}$$

Специальные функции $m_k^*(l_i)$ получены профессором Н.В. Корноуховым в виде:

$$\left.\begin{aligned} m_1^*(l_i) &= \frac{l_i}{8tg\,l_i} \cdot \frac{tg\,l_i - l_i}{tg\dfrac{l_i}{2} - \dfrac{l_i}{2}}, \\ m_2^*(l_i) &= \frac{l_i}{8\sin l_i} \cdot \frac{l_i - \sin l_i}{tg\dfrac{l_i}{2} - \dfrac{l_i}{2}}, \\ m_7^*(l_i) &= \frac{l_i^2 tg\,l_i}{3(tg\,l_i - l_i)}, \\ m_8^*(l_i) &= \frac{l_i^3}{3(tg\,l_i - l_i)}, i = 1(1)n. \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Анализ структуры матрицы жесткости $\boldsymbol{R}$ показывает, что она кодиагональная, Якобиева, так как $r_{ik} = r_{ki}, r_{ik} \cdot r_{ki} > 0$. Учитывая, что вектор $\boldsymbol{Z}$ отличен от нуля, приходим к выводу, что матрица $\boldsymbol{R}$ является сингулярной. Откуда неизвестный параметр l_0, через который определяются значения критических продольно-сжимающих сил, является минимальным корнем уравнения устойчивости:

$$\det \boldsymbol{R} = 0. \tag{5}$$

Заметим, что минимальный корень l_0 уравнения (5) определяет минимальное значение критической нагрузки P_0. Вообще, уравнение (5) имеет бесконечно большое количество корней, соответствующих Эйлеровым силам системы с бесконечно большим числом степеней свободы. Каждой высшей Эйлеровой нагрузке $P_{0i} > P_0$ соответствует своя форма равновесия, которая неустойчива и практически не существует без введения дополнительных связей.

Уравнение устойчивости (5) можно представить в виде:

$$\det \boldsymbol{R} = \prod_{i=1}^{n} r_{ii} - \sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{s=1 \\ s\neq i, \\ s\neq i-1}}^{n} r_{ss} r_{i-1i}^2 = 0. \tag{6}$$

Конечным результатом расчета устойчивости неразрезной балки является определение критических продольно-сжимающих сил $N_{kpi}, i = 1(1)n$ и приведенных длин пролетов $L_{ïði}, i = 1(1)n$ по выражениям:

$$N_{kpi} = \sum_{j=1}^{i} a_{pj} \cdot P_0,\ L_{npi} = m_i L_i,\ i = 1(1)n,$$

где $m_i = \dfrac{p}{a_{kpi}}$ - коэффициент приведенной длины i - го пролета;

$P_0 = \dfrac{l_0^2 \cdot EI}{L^2}$ - минимальное значение критической нагрузки.

Для практики представляет большой интерес исследование характера и величины изменений критических сил при изменении физических и геометрических параметров неразрезной балки. Этот вопрос имеет принципиальное значение в виду того, что практически коэффициенты канонических уравнений состояния, определяющие свойства исследуемой балки, всегда определяются приближенно или подвергаются целенаправленному изменению для изменения её свойств. При этом необходимо иметь в виду, что в случаях так называемых плохо обусловленных систем небольшие отклонения величин параметров от точных значений могут полностью обесценить получаемый в ходе решения результат.

Дальнейшие исследования проводятся с привлечением методов теории чувствительности [2]. При этом уравнение устойчивости в формах (5) или (6) будем рассматривать в качестве параметрической модели неразрезной балки. Простейшим по идее методом анализа чувствительности является численное исследование параметрической модели во всем диапазоне изменения определяющей совокупности параметров. Практическое применение такого подхода оказывается нецелесообразным или невозможным из-за огромного количества требуемых вычислений и необозримости полученных результатов.

Функции чувствительности первого порядка представляют собой производные различных переменных состояния по параметрам соответствующей определяющей группы. Заметим, что коэффициенты r_{ij} матрицы R являются голоморфными, отсюда функции чувствительности существуют и непрерывны по параметрам определяющей группы.

Первое приближение для дополнительного решения определяется в виде:

$$l_0^{((1))} = \sum_{\substack{i=1 \\ j=n+1}}^{n} U_{ij}(a_0)\tilde{a}_{ij} \tag{7}$$

где $\tilde{a}_{ij}$ - приращение (вариация) параметров,

$$U_{ij}(a_0) = \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \det R \Big|_{a=a_0} \tag{8}$$

- соответствующие функции чувствительности.

По (7) следует, что первое приближение линейно относительно приращений параметров $\tilde{a}_{ij}$ и функций чувствительности $U_{ij}(a_0)$, поэтому оно весьма удобно для анализа и его часто используют как приближенное представление дополнительного решения:

$$l_0 \approx l_0^{(1)}(a). \tag{9}$$

Таким образом, при исследовании чувствительности устойчивости неразрезных балок на первом шаге по уравнению устойчивости (5) либо (6) определяется минимальное значение l_0. На следующем шаге вычисляются функции чувствительности (8) по всем параметрам определяющей совокупности параметров a.

ЛИТЕРАТУРА

1. Киселев В. А. Строительная механика. Специальный курс. М.: Стройиздат, 1969. - 432 с.
2. Розенвассер Е. Н., Юсупов Р. М. Чувствительность систем управления. М.: Наука, 1981. - 464 с.