УДК 539.3
Ю.И. Бутенко

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПОГРАНСЛОЕВ В МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИНАХ

В работах [1-3] проведено тщательное изучение погранслоев для однослойной пластины из ортотропного материала. При определенных ограничениях вычислены погранслои в многослойных пластинах [4]. Эти ограничения связаны с тем, что использование точного аналитического подхода к многослойным конструкциям с учетом точного решения для каждого отдельного слоя приводит к трудностям раскрытия определителей высокого порядка. Так, для определения плоской краевой деформации n-слойной пластины задача сводится к определителю 4 x n-порядка. Использование для этих целей системы “Математика 4.0” [5] приводит к анализу большого числа выходных данных, что не позволяет получить компактные уравнения в замкнутом виде. Для преодоления указанных трудностей необходимо использовать особенности полученных определителей, что и представлено в работе.

1.Рассмотрим задачу определения НДС многослойной прямоугольной в плане пластины, размерами $a\times b\times 2H$, в физически и геометрически линейной постановке. Будем считать, что пластина состоит из n ортотропных слоев, отсчет которых ведется от нижнего слоя. Каждый k-слой имеет толщину $2h_k$ и описывается индивидуальной ортогональной системой координат x_k, y_k, z_k, в которой оси x_k, y_k связаны со срединной плоскостью слоя, а ось z_k нормальна к ней. Оси ортотропии слоя совпадают с системой координат.

Для k-ого слоя задача погранслоя описывается однородными уравнениями равновесия:

$$\frac{\partial\sigma_x^{(k)}}{\partial x_k}+\frac{\partial\tau_{xy}^{(k)}}{\partial y_k}+\frac{\partial\tau_{xz}^{(k)}}{\partial z_k}=0\qquad \frac{\partial\tau_{xy}^{(k)}}{\partial x_k}+\frac{\partial\sigma_y^{(k)}}{\partial y_k}+\frac{\partial\tau_{yz}^{(k)}}{\partial z_k}=0,\qquad \frac{\partial\tau_{xz}^{(k)}}{\partial x_k}+\frac{\partial\tau_{zy}^{(k)}}{\partial y_k}+\frac{\partial\sigma_z^{(k)}}{\partial z_k}=0 \tag{1.1}$$

и физическими соотношениями ортотропного тела:

$$\sigma_x^{(k)}=B_{11}^{(k)}\frac{\partial U^{(k)}}{\partial x_k}+B_{12}^{(k)}\frac{\partial V^{(k)}}{\partial y_k}+B_{13}^{(k)}\frac{\partial W^{(k)}}{\partial z_k},\ \sigma_y^{(k)}=B_{21}^{(k)}\frac{\partial U^{(k)}}{\partial x_k}+B_{22}^{(k)}\frac{\partial V^{(k)}}{\partial y_k}+B_{23}^{(k)}\frac{\partial W^{(k)}}{\partial z_k},$$

$$\sigma_z^{(k)}=B_{31}^{(k)}\frac{\partial U^{(k)}}{\partial x_k}+B_{32}^{(k)}\frac{\partial V^{(k)}}{\partial y_k}+B_{33}^{(k)}\frac{\partial W^{(k)}}{\partial z_k}, \tag{1.2}$$

$$\tau_{xy}^{(k)}=G_{12}^{(k)}\left(\frac{\partial U^{(k)}}{\partial y_k}+\frac{\partial V^{(k)}}{\partial x_k}\right),\ \tau_{yz}^{(k)}=G_{23}^{(k)}\left(\frac{\partial W^{(k)}}{\partial y_k}+\frac{\partial V^{(k)}}{\partial z_k}\right),\ \tau_{zx}^{(k)}=G_{31}^{(k)}\left(\frac{\partial W^{(k)}}{\partial x_k}+\frac{\partial U^{(k)}}{\partial z_k}\right).$$

Здесь $\sigma_{ij}^{(k)}$ – компоненты тензора напряжения; $\overline{U}^{(k)}(U^{(k)},V^{(k)},W^{(k)})$ – вектор перемещения k-ого слоя; $G_{ij}^{(k)}$ – модули сдвига в соответствующих плоскостях, а $B_{ij}^{(k)}$ – некоторые постоянные, которые записываются через модули упругости $E_i^{(k)}$ и коэффициенты Пуассона $\nu_{ij}^{(k)}(i,j=1,2,3)$ следующим образом:

$$B_{11}^{(k)}=\frac{E_1^{(k)}}{\Delta^{(k)}}(1-\nu_{23}^{(k)}\nu_{32}^{(k)}),\ B_{12}^{(k)}=\frac{E_1^{(k)}}{\Delta^{(k)}}(\nu_{12}^{(k)}+\nu_{13}^{(k)}\nu_{32}^{(k)}),\ B_{13}^{(k)}=\frac{E_1^{(k)}}{\Delta^{(k)}}(\nu_{13}^{(k)}+\nu_{12}^{(k)}\nu_{23}^{(k)}),$$

$$B_{21}^{(k)}=\frac{E_2^{(k)}}{\Delta^{(k)}}(\nu_{21}^{(k)}+\nu_{23}^{(k)}\nu_{31}^{(k)}),\ B_{22}^{(k)}=\frac{E_2^{(k)}}{\Delta^{(k)}}(1-\nu_{13}^{(k)}\nu_{31}^{(k)}),\ B_{23}^{(k)}=\frac{E_2^{(k)}}{\Delta^{(k)}}(\nu_{23}^{(k)}+\nu_{21}^{(k)}\nu_{13}^{(k)}),$$

$$B_{31}^{(k)}=\frac{E_3^{(k)}}{\Delta^{(k)}}(\nu_{31}^{(k)}+\nu_{32}^{(k)}\nu_{21}^{(k)}),\ B_{32}^{(k)}=\frac{E_3^{(k)}}{\Delta^{(k)}}(\nu_{32}^{(k)}+\nu_{31}^{(k)}\nu_{12}^{(k)}),\ B_{33}^{(k)}=\frac{E_3^{(k)}}{\Delta^{(k)}}(1-\nu_{12}^{(k)}\nu_{21}^{(k)}),$$

$$\Delta^{(k)}=1-\nu_{31}^{(k)}\nu_{12}^{(k)}\nu_{23}^{(k)}-\nu_{13}^{(k)}\nu_{32}^{(k)}\nu_{21}^{(k)}-\nu_{12}^{(k)}\nu_{21}^{(k)}-\nu_{23}^{(k)}\nu_{32}^{(k)}-\nu_{31}^{(k)}\nu_{13}^{(k)},\ B_{ij}^{(k)}=B_{ji}^{(k)}\ (i\neq j).$$

В системах уравнений (1.1)-(1.2) переходим к безразмерным координатам и перемещениям:

$$\xi_k=\frac{x_k}{a},\ \eta_k=\frac{y_k}{a},\ \zeta_k=\frac{z_k}{H},\ u=\frac{U}{a},\ \ v=\frac{V}{a},\ w=\frac{W}{a},$$

где a – наименьший размер пластины в плане, $H=\sum_{k=1}^{n}h_k$ – полутолщина многослойной пластины. Вводим также параметры: $\varepsilon=H/a$ – малый геометрический параметр, $\alpha_k=h_k/H$ – безразмерная полутолщина слоя.

Тогда уравнения теории упругости ортотропного тела k -ого слоя принимают вид:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial\sigma_x^{(k)}}{\partial\xi_k}+\frac{\partial\tau_{xy}^{(k)}}{\partial\eta_k}\right)+\frac{\partial\tau_{xz}^{(k)}}{\partial\zeta_k}=0,\quad \varepsilon\left(\frac{\partial\tau_{xy}^{(k)}}{\partial\xi_k}+\frac{\partial\sigma_y^{(k)}}{\partial\eta_k}\right)+\frac{\partial\tau_{yz}^{(k)}}{\partial\zeta_k}=0,$$
$$\varepsilon\left(\frac{\partial\tau_{xz}^{(k)}}{\partial\xi_k}+\frac{\partial\tau_{yz}^{(k)}}{\partial\eta_k}\right)+\frac{\partial\sigma_z^{(k)}}{\partial\zeta_k}=0, \tag{1.3}$$

$$\sigma_x^{(k)}=B_{11}^{(k)}\frac{\partial u^{(k)}}{\partial\xi_k}+B_{12}^{(k)}\frac{\partial v^{(k)}}{\partial\eta_k}+\varepsilon^{-1}B_{13}^{(k)}\frac{\partial w^{(k)}}{\partial\zeta_k},\ \ \sigma_y^{(k)}=B_{21}^{(k)}\frac{\partial u^{(k)}}{\partial\xi_k}+B_{22}^{(k)}\frac{\partial v^{(k)}}{\partial\eta_k}+\varepsilon^{-1}B_{23}^{(k)}\frac{\partial w^{(k)}}{\partial\zeta_k},$$
$$\sigma_z^{(k)}=B_{31}^{(k)}\frac{\partial u^{(k)}}{\partial\xi_k}+B_{32}^{(k)}\frac{\partial v^{(k)}}{\partial\eta_k}+\varepsilon^{-1}B_{33}^{(k)}\frac{\partial w^{(k)}}{\partial\zeta_k}, \tag{1.4}$$

$$\tau_{xy}^{(k)}=G_{12}^{(k)}\left(\frac{\partial u^{(k)}}{\partial\eta_k}+\frac{\partial v^{(k)}}{\partial\xi_k}\right),\ \tau_{yz}^{(k)}=G_{23}^{(k)}\left(\frac{\partial w^{(k)}}{\partial\eta_k}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial v^{(k)}}{\partial\zeta_k}\right),\ \tau_{zx}^{(k)}=G_{31}^{(k)}\left(\frac{\partial w^{(k)}}{\partial\xi_k}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial u^{(k)}}{\partial\zeta_k}\right).$$

Рассмотрим погранслой у кромки ξ_k=const. Проводим растяжение координаты $\xi_k=t_k\varepsilon$, и уравнения погранслоя примут вид:

$$\frac{\partial\sigma_x^{(k)}}{\partial t_k}+\varepsilon\frac{\partial\tau_{xy}^{(k)}}{\partial\eta_k}+\frac{\partial\tau_{xz}^{(k)}}{\partial\zeta_k}=0,\ \ \frac{\partial\tau_{xy}^{(k)}}{\partial t_k}+\varepsilon\frac{\partial\sigma_y^{(k)}}{\partial\eta_k}+\frac{\partial\tau_{yz}^{(k)}}{\partial\zeta_k}=0,\ \ \frac{\partial\tau_{xz}^{(k)}}{\partial t_k}+\varepsilon\frac{\partial\tau_{yz}^{(k)}}{\partial\eta_k}+\frac{\partial\sigma_z^{(k)}}{\partial\zeta_k}=0, \tag{1.5}$$

$$\sigma_x^{(k)}=\varepsilon^{-1}B_{11}^{(k)}\frac{\partial u^{(k)}}{\partial t_k}+B_{12}^{(k)}\frac{\partial v^{(k)}}{\partial\eta_k}+\varepsilon^{-1}B_{13}^{(k)}\frac{\partial w^{(k)}}{\partial\zeta_k},$$
$$\sigma_y^{(k)}=\varepsilon^{-1}B_{21}^{(k)}\frac{\partial u^{(k)}}{\partial t_k}+B_{22}^{(k)}\frac{\partial v^{(k)}}{\partial\eta_k}+\varepsilon^{-1}B_{23}^{(k)}\frac{\partial w^{(k)}}{\partial\zeta_k}, \tag{1.6}$$
$$\sigma_z^{(k)}=\varepsilon^{-1}B_{31}^{(k)}\frac{\partial u^{(k)}}{\partial t_k}+B_{32}^{(k)}\frac{\partial v^{(k)}}{\partial\eta_k}+\varepsilon^{-1}B_{33}^{(k)}\frac{\partial w^{(k)}}{\partial\zeta_k},$$
$$\tau_{xy}^{(k)}=G_{12}^{(k)}\left(\frac{\partial u^{(k)}}{\partial\eta_k}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial v^{(k)}}{\partial t_k}\right),\ \tau_{yz}^{(k)}=G_{23}^{(k)}\left(\frac{\partial w^{(k)}}{\partial\eta_k}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial v^{(k)}}{\partial\zeta_k}\right),$$
$$\tau_{zx}^{(k)}=G_{31}^{(k)}\varepsilon^{-1}\left(\frac{\partial w^{(k)}}{\partial t_k}+\frac{\partial u^{(k)}}{\partial\zeta_k}\right).$$

2.Система уравнений (1.5)-(1.6) содержит два вида краевых решений: плоскую и антиплоскую деформации (краевое скручивание)[1,2].

В задаче о плоской деформации решение обозначим индексом “p” сверху и для основных величин решение ищем в виде асимптотического представления:

$$\left(\overset{p}{\sigma}{}_x^{(k)},\overset{p}{\sigma}{}_y^{(k)},\overset{p}{\sigma}{}_z^{(k)},\overset{p}{\tau}{}_{xz}^{(k)}\right)=\sum_{s=0}\varepsilon^{q_p}\left(\overset{p}{\sigma}{}_x^{(k)s},\overset{p}{\sigma}{}_y^{(k)s},\overset{p}{\sigma}{}_z^{(k)s},\overset{p}{\tau}{}_{zx}^{(k)s}\right),$$

$$\left(\overset{p}{u}{}^{(k)},\overset{p}{w}{}^{(k)}\right)=\sum_{s=0}\varepsilon^{q_p+1}\left(\overset{p}{u}{}^{(k)s},\overset{p}{w}{}^{(k)s}\right),\qquad (2.1)$$

а для вспомогательных величин:

$$\left(\overset{p}{\tau}{}_{xy}^{(k)},\ \overset{p}{\tau}{}_{yz}^{(k)}\right)=\sum_{s=0}\varepsilon^{q_p+1}\left(\overset{p}{\tau}{}_{xy}^{(k)s},\overset{p}{\tau}{}_{yz}^{(k)s}\right),\qquad \overset{p}{\mathrm{v}}{}^{(k)}=\sum_{s=0}\varepsilon^{q_p+2}\,\overset{p}{\mathrm{v}}{}^{(k)s}.\qquad (2.2)$$

Здесь, $q_p = s+\kappa_p$, где параметр κ_p должен выбираться из условия согласования краевых условий внутренней задачи и задачи погранслоя.

После подстановки соотношений (2.1) и (2.2) в уравнения (1.5)- (1.6) для коэффициентов рядов (2.1)-(2.2) получены следующие уравнения равновесия:

$$\frac{\partial\overset{p}{\sigma}{}_x^{(k)s}}{\partial t_k}+\frac{\partial\overset{p}{\tau}{}_{xy}^{(k)s-2}}{\partial\eta_k}+\frac{\partial\overset{p}{\tau}{}_{xz}^{(k)s}}{\partial\zeta_k}=0,\quad \frac{\partial\overset{p}{\tau}{}_{xy}^{(k)s}}{\partial t_k}+\frac{\partial\overset{p}{\sigma}{}_y^{(k)s}}{\partial\eta_k}+\frac{\partial\overset{p}{\tau}{}_{yz}^{(k)s}}{\partial\zeta_k}=0,$$

$$\frac{\partial\overset{p}{\tau}{}_{xz}^{(k)s}}{\partial t_k}+\frac{\partial\overset{p}{\tau}{}_{yz}^{(k)s-2}}{\partial\eta_k}+\frac{\partial\overset{p}{\sigma}{}_z^{(k)s}}{\partial\zeta_k}=0\qquad (2.3)$$

и соотношения упругости:

$$\overset{p}{s}{}_x^{(k)s}=B_{11}^{(k)}\frac{\partial\overset{p}{u}{}^{(k)s}}{\partial t_k}+B_{12}^{(k)}\frac{\partial\overset{p}{\mathrm{v}}{}^{(k)s-2}}{\partial h_k}+B_{13}^{(k)}\frac{\partial\overset{p}{w}{}^{(k)s}}{\partial z_k},$$

$$\overset{p}{s}{}_y^{(k)s}=B_{21}^{(k)}\frac{\partial\overset{p}{u}{}^{(k)s}}{\partial t_k}+B_{22}^{(k)}\frac{\partial\overset{p}{\mathrm{v}}{}^{(k)s-2}}{\partial h_k}+B_{23}^{(k)}\frac{\partial\overset{p}{w}{}^{(k)s}}{\partial z_k},\qquad (2.4)$$

$$\overset{p}{s}{}_z^{(k)s}=B_{31}^{(k)}\frac{\partial\overset{p}{u}{}^{(k)s}}{\partial t_k}+B_{32}^{(k)}\frac{\partial\overset{p}{\mathrm{v}}{}^{(k)s-2}}{\partial h_k}+B_{33}^{(k)}\frac{\partial\overset{p}{w}{}^{(k)s}}{\partial z_k},$$

$$\overset{p}{t}{}_{xy}^{(k)s}=G_{12}^{(k)}\left(\frac{\partial\overset{p}{u}{}^{(k)s}}{\partial h_k}+\frac{\partial\overset{p}{\mathrm{v}}{}^{(k)s}}{\partial t_k}\right),\ \overset{p}{t}{}_{yz}^{(k)s}=G_{23}^{(k)}\left(\frac{\partial\overset{p}{w}{}^{(k)s}}{\partial h_k}+\frac{\partial\overset{p}{\mathrm{v}}{}^{(k)s}}{\partial z_k}\right),\ \overset{p}{t}{}_{xz}^{(k)s}=G_{31}^{(k)}\left(\frac{\partial\overset{p}{w}{}^{(k)s}}{\partial t_k}+\frac{\partial\overset{p}{u}{}^{(k)s}}{\partial z_k}\right).$$

Здесь и далее величины с отрицательными индексами s тождественны нулю.

Система уравнений (2.3)-(2.4) распадается на основную и вспомогательную системы уравнений. Основная система уравнений служит для определения перемещений и состоит из уравнений равновесия:

$$\frac{\partial\overset{p}{s}{}_x^{(k)s}}{\partial t_k}+\frac{\partial\overset{p}{t}{}_{xy}^{(k)s-2}}{\partial h_k}+\frac{\partial\overset{p}{t}{}_{xz}^{(k)s}}{\partial z_k}=0,\qquad \frac{\partial\overset{p}{t}{}_{xz}^{(k)s}}{\partial t_k}+\frac{\partial\overset{p}{t}{}_{yz}^{(k)s-2}}{\partial h_k}+\frac{\partial\overset{p}{s}{}_z^{(k)s}}{\partial z_k}=0,\qquad (2.5)$$

и соотношений упругости:

$$
\begin{gathered}
\overset{p}{s}{}_x^{(k)s} = B_{11}^{(k)} \frac{\partial \overset{p}{u}{}^{(k)s}}{\partial t_k} + B_{12}^{(k)} \frac{\partial \overset{p}{\mathrm{v}}{}^{(k)s-2}}{\partial h_k} + B_{13}^{(k)} \frac{\partial \overset{p}{w}{}^{(k)s}}{\partial z_k}, \\
\overset{p}{s}{}_y^{(k)s} = B_{21}^{(k)} \frac{\partial \overset{p}{u}{}^{(k)s}}{\partial t_k} + B_{22}^{(k)} \frac{\partial \overset{p}{\mathrm{v}}{}^{(k)s-2}}{\partial h_k} + B_{23}^{(k)} \frac{\partial \overset{p}{w}{}^{(k)s}}{\partial z_k}, \\
\overset{p}{s}{}_z^{(k)s} = B_{31}^{(k)} \frac{\partial \overset{p}{u}{}^{(k)s}}{\partial t_k} + B_{32}^{(k)} \frac{\partial \overset{p}{\mathrm{v}}{}^{(k)s-2}}{\partial h_k} + B_{33}^{(k)} \frac{\partial \overset{p}{w}{}^{(k)s}}{\partial z_k}, \quad \overset{p}{t}{}_{xz}^{(k)s} = G_{31}^{(k)} \left(\frac{\partial \overset{p}{w}{}^{(k)s}}{\partial t_k} + \frac{\partial \overset{p}{u}{}^{(k)s}}{\partial z_k} \right).
\end{gathered}
\tag{2.6}
$$

Вспомогательная система уравнения содержит уравнение равновесия

$$
\frac{\partial \overset{p}{t}{}_{xy}^{(k)s}}{\partial t_k} + \frac{\partial \overset{p}{s}{}_y^{(k)s}}{\partial h_k} + \frac{\partial \overset{p}{t}{}_{yz}^{(k)s}}{\partial z_k} = 0
\tag{2.7}
$$

и соотношения упругости:

$$
\overset{p}{t}{}_{xy}^{`(k)s} = G_{12}^{(k)} \left( \frac{\partial \overset{p}{u}{}^{(k)s}}{\partial h_k} + \frac{\partial \overset{p}{\mathrm{v}}{}^{(k)s}}{\partial t_k} \right), \quad \overset{p}{t}{}_{yz}^{`(k)s} = G_{23}^{(k)} \left(\frac{\partial \overset{p}{w}{}^{(k)s}}{\partial h_k} + \frac{\partial \overset{p}{\mathrm{v}}{}^{(k)s}}{\partial z_k} \right).
\tag{2.8}
$$

В основной системе уравнений (2.5)-(2.6) при s=0,1 исключаются из рассмотрения напряжения и перемещение, которые затем находятся из вспомогательной системы уравнений при известных основных параметрах. При $s \geq 2$ вспомогательные величины являются известными функциями.

Для решения основной системы после подстановки (2.6) в (2.5) получим уравнения равновесия в перемещениях $\overset{p}{u}{}^{(k)s}, \overset{p}{w}{}^{(k)s}$:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2 \overset{p}{u}{}^{(k)s}}{\partial t_k^2} + n_1^{(k)} \frac{\partial^2 \overset{p}{u}{}^{(k)s}}{\partial z_k^2} + n_2^{(k)} \frac{\partial^2 \overset{p}{w}{}^{(k)s}}{\partial t_k \partial z_k} = \overset{p}{R}{}_a^{(k)s-2}, \\
n_3^{(k)} \frac{\partial^2 \overset{p}{w}{}^{(k)s}}{\partial t_k^2} + \frac{\partial^2 \overset{p}{w}{}^{(k)s}}{\partial z_k^2} + n_4^{(k)} \frac{\partial^2 \overset{p}{u}{}^{(k)s}}{\partial t_k \partial z_k} = \overset{p}{R}{}_g^{(k)s-2},
\end{gathered}
\tag{2.9}
$$

Эту систему можно назвать некоторой плоской задачей теории упругости в плоскости $x, z(t, \zeta)$. Здесь введены обозначения:

$$
\nu_1^{(k)} = G_{31}^{(k)} / B_{11}^{(k)},\ \nu_2^{(k)} = (B_{13}^{(k)} + G_{31}^{(k)}) / B_{11}^{(k)},\ \nu_3^{(k)} = G_{31}^{(k)} / B_{33}^{(k)},\ \nu_4^{(k)} = (B_{31}^{(k)} + G_{31}^{(k)}) / B_{33}^{(k)},
$$

$$
\begin{gathered}
\overset{p}{R}{}_\alpha^{(k)s-2} = -\frac{B_{12}^{(k)} + G_{12}^{(k)}}{B_{11}^{(k)}} \frac{\partial^2 \overset{p}{\mathrm{v}}{}^{(k)s-2}}{\partial \mathrm{t}_k \partial \eta_k} - \frac{G_{12}^{(k)}}{B_{11}^{(k)}} \frac{\partial^2 \overset{p}{u}{}^{(k)s-2}}{\partial \eta_k^2}, \\
\overset{p}{R}{}_\gamma^{(k)s=2} = -\frac{B_{32}^{(k)} + G_{23}^{(k)}}{B_{33}^{(k)}} \frac{\partial^2 \overset{p}{\mathrm{v}}{}^{(k)s-2}}{\partial \eta_k \partial \zeta_k} - \frac{G_{23}^{(k)}}{B_{33}^{(k)}} \frac{\partial^2 \overset{p}{w}{}^{(k)s-2}}{\partial \eta_k^2}.
\end{gathered}
\tag{2.10}
$$

“Массовые“ силы $\overset{p}{R}{}_a^{(k)s-2}, \overset{p}{R}{}_g^{(k)s-2}$, неравные нулю лишь при $s \geq 2$, могут привести к незатухающим решениям, и поэтому необходимо получить условия существования затухающих решений краевой плоской задачи.

Решение однородной системы уравнений (2.9) при s=0,1 ищем в виде метода Фурье:

$$\overset{p}{u}{}^{(k)s}(t_k, z_k, h_k) = \overset{p}{u}{}_1^{(k)s}(z_k) j^{(k)s}(h_k) e^{-l t_k}, \quad \overset{p}{w}{}^{(k)s}(t_k, z_k, h_k) = \overset{p}{u}{}_3^{(k)s}(z_k) j^{(k)s}(h_k) e^{-l t_k}. \tag{2.11}$$

Где λ>0 - показатель изменяемости погранслоя. Решение строится с точностью до некоторой функции $\varphi^{(k)s}$.
После подстановки (2.11) в (2.9) получаем однородную систему уравнений для определения изменения функций по толщине слоя (ξ_k):

$$n_1^{(k)} \frac{d^2 \overset{p}{u}{}_1^{(k)s}}{dz_k^2} + l^2 \overset{p}{u}{}_1^{(k)s} - n_2^{(k)} l \frac{d \overset{p}{u}{}_3^{(k)s}}{dz_k} = 0, \frac{d^2 \overset{p}{u}{}_3^{(k)s}}{dz_k^2} + n_3^{(k)} l^2 \overset{p}{u}{}_3^{(k)s} - n_4^{(k)} l \frac{d \overset{p}{u}{}_1^{(k)s}}{dz_k} = 0. \tag{2.12}$$

Соотношения упругости (2.6) записываются в виде:

$$\begin{aligned}
\overset{p}{s}{}_x^{(k)s} &= \overline{E}_1^{(k)} j^{(k)s}(h_k)\left(-l\,\overset{p}{u}{}_1^{(k)s} + m_{13}^{(k)} \frac{d\overset{p}{u}{}_3^{(k)s}}{dz_k}\right) e^{-l t_k},\\
\overset{p}{s}{}_y^{(k)s} &= \overline{E}_2^{(k)} j^{(k)s}(h_k)\left(-l\,m_{21}^{(k)} \overset{p}{u}{}_1^{(k)s} + m_{23}^{(k)} \frac{d\overset{p}{u}{}_3^{(k)s}}{dz_k}\right) e^{-l t_k},\\
\overset{p}{s}{}_z^{(k)s} &= \overline{E}_3^{(k)} j^{(k)s}(h_k)\left(\frac{d\overset{p}{u}{}_3^{(k)s}}{dz_k} - m_{31}^{(k)} l\,\overset{p}{u}{}_1^{(k)s}\right) e^{-l t_k},\\
\overset{p}{t}{}_{xz}^{(k)s} &= G_{31}^{(k)s} j^{(k)s}(h_k)\left(\frac{d\overset{p}{u}{}_1^{(k)s}}{dz_k} - l\,\overset{p}{u}{}_3^{(k)s}\right) e^{-l t_k}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Здесь и далее используются общепринятые обозначения:

$$\overline{E}_1^{(k)} = B_{11}^{(k)}, \overline{E}_2^{(k)} = B_{22}^{(k)}, \overline{E}_3^{(k)} = B_{33}^{(k)}, \mu_{12}^{(k)} = B_{12}^{(k)} / B_{11}^{(k)}, \mu_{13}^{(k)} = B_{13}^{(k)} / B_{11}^{(k)},$$

$$\mu_{21}^{(k)} = B_{21}^{(k)} / B_{22}^{(k)}, \mu_{23}^{(k)} = B_{23}^{(k)} / B_{22}^{(k)}, \mu_{31}^{(k)} = B_{31}^{(k)} / B_{33}^{(k)}, \mu_{32}^{(k)} = B_{32}^{(k)} / B_{33}^{(k)}.$$

Выражения μ_{ij} играют роль специфичных коэффициентов Пуассона и для плоского напряженного состояния совпадают с ними $\mu_{ij} = \nu_{ij}$.

Решение системы однородных уравнений (2.12) ищем в виде:

$$\overset{p}{u}{}_1^{(k)s}(z_k) = C_1^{(k)s} e^{g z_k}, \ \overset{p}{u}{}_3^{(k)s}(z_k) = C_2^{(k)s} e^{g z_k}, \tag{2.14}$$

где $C_1^{(k)s}, C_2^{(k)s}$ - постоянные интегрирования k-ого слоя.

После подстановки (2.14) в (2.13) приходим к однородной алгебраической системе уравнений относительно постоянных $C_1^{(k)s}, C_2^{(k)s}$:

$$(n_1^{(k)} g^2 + l^2) C_1^{(k)s} - n_2^{(k)} l g C_2^{(k)s} = 0, \ -n_4^{(k)} l g C_1^{(k)s} + \left(g^2 + n_3^{(k)} l^2\right) C_2^{(k)s} = 0. \tag{2.15}$$

Наличие ненулевого решения требует, чтобы определитель коэффициентов этой системы был равен нулю. Из этого следует алгебраическое уравнение относительно γ.

$$n_1^{(k)} g^4 + l^2 (1 + n_1^{(k)} n_3^{(k)} - n_2^{(k)} n_4^{(k)}) g^2 + n_3^{(k)} l^4 = 0 \tag{2.16}$$

Для плоского напряженного состояния уравнение (2.16) хорошо изучено[2] и его корни имеют вид:

$$g_{1,2}^2 = -l^2 \frac{1 + n_1^{(k)} n_3^{(k)} - n_2^{(k)} n_4^{(k)}}{2 n_1^{(k)}} \pm l^2 \frac{1}{2 n_1^{(k)}} \sqrt{D^{(k)}},$$

где: $D^{(k)} = (1+n_1^{(k)}n_3^{(k)} - n_2^{(k)}n_4^{(k)})^2 - 4n_1^{(k)}n_3^{(k)}$.

В зависимости от значений упругих постоянных характеристическое уравнение имеет корни следующих вариантов [2]:

задача А при $D^{(k)}=0$

$$g_{1,2}^{(k)} = i\,l\,b^{(k)}, \quad g_{3,4}^{(k)} = -i\,l\,b^{(k)}, \quad b^{(k)} = \sqrt[4]{\frac{n_3^{(k)}}{n_1^{(k)}}} = \sqrt[4]{\frac{E_1^{(k)}}{1-n_{12}^{(k)}n_{21}^{(k)}} \cdot \frac{1-n_{23}^{(k)}n_{32}^{(k)}}{E_3^{(k)}}}, \tag{2.17}$$

задача Б при $D^{(k)}>0$

$$g_{1,2}^{(k)} = \pm i\,l\,b_1^{(k)}, \quad g_{3,4}^{(k)} = \pm i\,l\,b_2^{(k)}, \quad b_1^{(k)} = \sqrt{\frac{1}{2n_1^{(k)}}\left[1+n_1^{(k)}n_3^{(k)} - n_2^{(k)}n_4^{(k)} - \sqrt{D^{(k)}}\right]},$$

$$b_2^{(k)} = \sqrt{\frac{1}{2n_1^{(k)}}\left[1+n_1^{(k)}n_3^{(k)} - n_2^{(k)}n_4^{(k)} + \sqrt{D^{(k)}}\right]}, \tag{2.18}$$

задача В при $D^{(k)}<0$

$$g_{1-4}^{(k)} = \pm a^{(k)} \pm ib^{(k)}, \quad a^{(k)} = \sqrt{\frac{1}{2n_1^{(k)}}\left[\sqrt{n_1^{(k)}n_3^{(k)}} - \frac{1}{2}(1+n_1^{(k)}n_3^{(k)} - n_2^{(k)}n_4^{(k)})\right]},$$

$$b^{(k)} = \sqrt{\frac{1}{2n_1^{(k)}}\left[\sqrt{n_1^{(k)}n_3^{(k)}} + \frac{1}{2}(1+n_1^{(k)}n_3^{(k)} - n_2^{(k)}n_4^{(k)})\right]}. \tag{2.19}$$

В соотношениях (2.17)-(2.19) $\alpha^{(k)}, \beta^{(k)}, \beta_1^{(k)}, \beta_2^{(k)} > 0$.

Решение задачи А при корнях γ (2.17) записывается в виде:

$$\overset{p}{u}{}_1^{(k)s} = q_1^{(k)}\left[\beta^{(k)}A_1^{(k)s} - q_2^{(k)}A_2^{(k)s}\right]\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k + q_1^{(k)}\left[\beta^{(k)}A_3^{(k)s} + q_2^{(k)}A_4^{(k)s}\right]\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k +$$
$$+ q_1^{(k)}\beta^{(k)}\left(A_2^{(k)s}\zeta_k\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k + A_4^{(k)s}\zeta_k\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k\right), \tag{2.20}$$
$$\overset{p}{u}{}_3^{(k)s} = A_1^{(k)s}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k - A_2^{(k)s}\zeta_k\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k - A_3^{(k)s}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k + A_4^{(k)s}\zeta_k\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k,$$

где: $q_1^{(k)} = \dfrac{n_2^{(k)}}{1-n_1^{(k)}b^{(k)2}}, \quad q_2^{(k)} = \dfrac{1+n_1^{(k)}b^{(k)2}}{1-n_1^{(k)}b^{(k)2}}$.

Напряжения в слое k имеют вид:

$$\overset{p}{\sigma}{}_x^{(k)s} = -\overline{E}_1^{(k)}\Big[(b_1^{(k)}A_1^{(k)s} - b_2^{(k)}A_2^{(k)s})\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k + (b_1^{(k)}A_3^{(k)s} +$$
$$+ b_2^{(k)}A_4^{(k)s})\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k + b_1^{(k)}(A_2^{(k)s}\zeta_k\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k + A_4\zeta_k\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k)\Big]\varphi^{(k)s}(\eta_k)e^{-\lambda t_k},$$

$$\overset{p}{\sigma}{}_y^{(k)s} = -\overline{E}_2^{(k)}\Big[(b_3^{(k)}A_1^{(k)s} - b_4^{(k)}A_2^{(k)s})\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k + (b_3^{(k)}A_3^{(k)s} +$$
$$+ b_4^{(k)}A_4^{(k)s})\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k + b_3^{(k)}(A_2^{(k)s}\zeta_k\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k + A_4\zeta_k\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k)\Big]\varphi^{(k)s}(\eta_k)e^{-\lambda t_k},$$

$$\overset{p}{\sigma}{}_z^{(k)s} = -\overline{E}_3^{(k)}\Big[(b_5^{(k)}A_1^{(k)s} - b_6^{(k)}A_2^{(k)s})\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k + (b_5^{(k)}A_3^{(k)s} + \tag{2.21}$$
$$+ b_6^{(k)}A_4^{(k)s})\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k + b_5^{(k)}(A_2^{(k)s}\zeta_k\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k + A_4\zeta_k\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k)\Big]\varphi^{(k)s}(\eta_k)e^{-\lambda t_k},$$

$$\overset{p}{\tau}{}_{xz}^{(k)} = G_{31}^{(k)}\Big[-(b_7^{(k)}A_1^{(k)s} - b_8^{(k)}A_2^{(k)s})\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k + (b_7^{(k)}A_3^{(k)s} +$$
$$+ b_8^{(k)}A_4^{(k)s})\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k + b_7^{(k)}(A_2^{(k)s}\zeta_k\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k - A_4\zeta_k\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k)\Big]\varphi^{(k)s}(\eta_k)e^{-\lambda t_k},$$

где

$$b_1^{(k)} = l\,b^{(k)}\left(\frac{n_2^{(k)}}{1-n_1^{(k)}b^{(k)2}} - m_{12}^{(k)}\right), \qquad b_2^{(k)} = \frac{n_2^{(k)}(1+n_1^{(k)}b^{(k)2})}{(1-n_1^{(k)}b^{(k)2})^2} - m_{13}^{(k)},$$

$$b_3^{(k)} = l\,b^{(k)}\left(m_{21}^{(k)}\frac{n_2^{(k)}}{1-n_1^{(k)}b^{(k)2}} - m_{23}^{(k)}\right), \qquad b_4^{(k)} = m_{21}^{(k)}\frac{n_2^{(k)}(1+n_1^{(k)}b^{(k)2})}{(1-n_1^{(k)}b^{(k)2})^2} - m_{23}^{(k)},$$

$$b_5^{(k)} = l\,b^{(k)}\left(m_{31}^{(k)}\frac{n_2^{(k)}}{1-n_1^{(k)}b^{(k)2}} - 1\right), \qquad b_6^{(k)} = m_{31}^{(k)}\frac{n_2^{(k)}(1+n_1^{(k)}b^{(k)2})}{(1-n_1^{(k)}b^{(k)2})^2} - 1,$$

$$b_7^{(k)} = l\left(1+\frac{n_2^{(k)}b^{(k)2}}{1-n_1^{(k)}b^{(k)2}}\right), \qquad b_8^{(k)} = b^{(k)}\frac{2n_2^{(k)}}{(1-n_1^{(k)}b^{(k)2})^2}.$$

В частном случае для изотропного материала имеем:

$$b^{(k)} = 1, \quad n_1^{(k)} = \frac{1-2n}{2(1-n)}, \quad n_2^{(k)} = \frac{1}{2(1-n)}, \quad n_1^{(k)} + n_2^{(k)} = 1,$$

$$m_{12} = m_{21} = m_{13} = m_{31} = m_{23} = m_{32} = \frac{n}{1-n}.$$

$$b_1^{(k)} = \lambda(1-\mu), \quad b_2^{(k)} = \frac{1+\nu_1^{(k)}}{\nu_2^{(k)}} - \mu, \quad b_3^{(k)} = 0, \quad b_4^{(k)} = \mu\frac{2\nu_1^{(k)}}{\nu_2^{(k)}},$$

$$b_5^{(k)} = \lambda(\mu-1), \quad b_6^{(k)} = \mu\frac{1+\nu_1^{(k)}}{\nu_2^{(k)}} - 1, \quad b_7^{(k)} = 2\lambda, \quad b_8^{(k)} = \frac{2}{\nu_2^{(k)}}$$

и тогда при выполнении статических краевых условий на лицевых поверхностях однослойной пластины получим известные уравнения:

$$\sin 2l \pm 2l = 0,$$

описывающие соответственно плоский погранслой для задачи растяжения-сжатия (знак +) и изгиба (знак -) . Эти уравнения хорошо изучены в монографии Л.А. Агаловяна [2].

Решение задачи Б, которая чаще всего имеет место для ортотропного материала [2], записывается:

$$\begin{aligned} \overset{p}{u}{}_1^{(k)s} &= -q_1^{(k)}A_1^{(k)s}\sin lb_1^{(k)}z_k + q_1^{(k)}A_2^{(k)s}\cos lb_1^{(k)}z_k - q_2^{(k)}A_3^{(k)s}\sin lb_2^{(k)}z_k + \\ &+ q_2^{(k)}A_4^{(k)s}\cos lb_2^{(k)}z_k, \\ \overset{p}{u}{}_3^{(k)s} &= A_1^{(k)s}\cos lb_1^{(k)}z_k + A_2^{(k)s}\sin lb_1^{(k)}z_k + A_3^{(k)s}\cos lb_2^{(k)}z_k + A_4^{(k)s}\sin lb_2^{(k)}z_k, \end{aligned} \tag{2.22}$$

при $q_1^{(k)} = \dfrac{n_2^{(k)}b_1^{(k)}}{1-n_1^{(k)}b_1^{(k)2}}, \quad q_2^{(k)} = \dfrac{n_2^{(k)}b_2^{(k)}}{1-n_1^{(k)}b_2^{(k)2}}$

Напряжения определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} \overset{p}{\sigma}{}_x^{(k)s} &= \bar{E}_1^{(k)}\lambda\Big(b_1^{(k)}A_1^{(k)s}\sin\lambda\beta_1^{(k)}\zeta_k - b_1^{(k)}A_2^{(k)s}\cos\lambda\beta_1^{(k)}\zeta_k + b_2^{(k)}A_3^{(k)s}\sin\lambda\beta_2^{(k)}\zeta_k - \\ &- b_2^{(k)}A_4^{(k)s}\cos\lambda\beta_2^{(k)}\zeta_k\Big)\varphi^{(k)s}(\eta_k)e^{-\lambda t_k}, \\ \overset{p}{\sigma}{}_y^{(k)s} &= \bar{E}_2^{(k)}\lambda\Big(b_3^{(k)}A_1^{(k)}\sin\lambda\beta_1^{(k)}\zeta_k - b_3^{(k)}A_2^{(k0)}\cos\lambda\beta_1^{(k)}\zeta_k + b_4^{(k)}A_3^{(k)}\sin\lambda\beta_2^{(k)}\zeta_k - \\ &- b_4^{(k)}A_4^{(k0)}\cos\lambda\beta_2^{(k)}\zeta_k\Big)\varphi^{(k)s}(\eta_k)e^{-\lambda t_k}, \end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\overset{p}{\sigma}{}_z^{(k)} = -\overline{E}_3^{(k)}\lambda\Big(b_5^{(k)}A_1^{(k)s}\sin\lambda\beta_1^{(k)}\zeta_k - b_5^{(k)}A_2^{(k)s}\cos\lambda\beta_1^{(k)}\zeta_k + b_6^{(k)}A_3^{(k)s}\sin\lambda\beta_2^{(k)}\zeta_k -$$
$$- b_6^{(k)}A_4^{(k)s}\cos\lambda\beta_2^{(k)}\zeta_k\Big)\varphi^{(k)s}(\eta_k)e^{-\lambda t_k},$$

$$\overset{p}{\tau}{}_{xz}^{(k)s} = -G_{31}^{(k)}\lambda\Big(b_7^{(k)}A_1^{(k)s}\cos\lambda\beta_1^{(k)}\zeta_k + b_7^{(k)}A_2^{(k)s}\sin\lambda\beta_1^{(k)}\zeta_k + b_8^{(k)}A_3^{(k)s}\cos\lambda\beta_2^{(k)}\zeta_k +$$
$$+ b_8^{(k)}A_4^{(k)s}\sin\lambda\beta_2^{(k)}\zeta_k\Big)\varphi^{(k)s}(\eta_k)e^{-\lambda t_k},$$

где $b_1^{(k)} = q_1^{(k)} - \mu_{13}^{(k)}\beta_1^{(k)}$, $b_2^{(k)} = q_2^{(k)} - \mu_{13}^{(k)}\beta_2^{(k)}$, $b_3^{(k)} = \mu_{21}^{(k)}q_1^{(k)} - \mu_{23}^{(k)}\beta_1^{(k)}$,

$b_4^{(k)} = \mu_{21}^{(k)}q_2^{(k)} - \mu_{23}^{(k)}\beta_2^{(k)}$, $b_5^{(k)} = \beta_1^{(k)} - \mu_{31}^{(k)}q_1^{(k)}$, $b_6^{(k)} = \beta_2^{(k)} - \mu_{31}^{(k)}q_2^{(k)}$,

$b_7^{(k)} = 1 + q_1^{(k)}\beta_1^{(k)}$, $b_8^{(k)} = 1 + q_2^{(k)}\beta_2^{(k)}$.

Для задачи В перемещения вычисляются по соотношениям:

$$\begin{aligned}
\overset{p}{u}{}_1^{(k)s} &= e^{a^{(k)}lz_k}\left(A_1^{(k)s}\cos lb^{(k)}z_k + A_2^{(k)s}\sin lb^{(k)}z_k\right) + e^{-a^{(k)}lz_k}\left(A_3^{(k)s}\cos lb^{(k)}z_k + \right.\\
&\left. + A_4^{(k)s}\sin lb^{(k)}z_k\right),\\
\overset{p}{u}{}_3^{(k)s} &= A_1^{(k)s}e^{a^{(k)}lz_k}\left(a^{(k)}\cos lb^{(k)}z_k - b^{(k)}\sin lb^{(k)}z_k\right) +\\
&+ A_2^{(k)s}e^{a^{(k)}lz_k}\left(b^{(k)}\cos lb^{(k)}z_k + a^{(k)}\sin lb^{(k)}z_k\right) -\\
&- A_3^{(k)s}e^{-a^{(k)}lz_k}\left(a^{(k)}\cos lb^{(k)}z_k + b^{(k)}\sin lb^{(k)}z_k\right) +\\
&+ A_4^{(k)s}e^{-a^{(k)}lz_k}\left(b^{(k)}\cos lb^{(k)}z_k - a^{(k)}\sin lb^{(k)}z_k\right).
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Здесь $a^{(k)} = \dfrac{a^{(k)}}{n_2^{(k)}}\left(n_1^{(k)} + \dfrac{1}{a^{(k)2} + b^{(k)2}}\right)$, $b^{(k)} = \dfrac{b^{(k)}}{n_2^{(k)}}\left(n_1^{(k)} - \dfrac{1}{a^{(k)2} + b^{(k)2}}\right)$.

Напряжения записываются в виде:

$$\overset{p}{\sigma}{}_x^{(k)s} = \overline{E}_1^{(k)}\lambda\Big[A_1^{(k)s}e^{\alpha^{(k)}\lambda\zeta_k}(b_1^{(k)}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k - b_2^{(k)}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k) +$$
$$+ A_2^{(k)s}e^{\alpha^{(k)}\lambda\zeta_k}(b_1^{(k)}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k + b_2^{(k)}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k) + A_3^{(k)s}e^{-\alpha^{(k)}\lambda\zeta_k}(b_1^{(k)}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k$$
$$+ b_2^{(k)}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k) + A_4^{(k)s}e^{-\alpha^{(k)}\lambda\zeta_k}(b_1^{(k)}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k - b_2^{(k)}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k)\Big]\varphi^{(k)s}(\eta_k)e^{-\lambda}$$

(2.25)

$$\overset{p}{\sigma}{}_y^{(k)s} = \overline{E}_2^{(k)}\lambda\Big[A_1^{(k)s}e^{\alpha^{(k)}\lambda\zeta_k}(b_3^{(k)}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k - b_4^{(k)}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k) +$$
$$+ A_2^{(k)s}e^{\alpha^{(k)}\lambda\zeta_k}(b_3^{(k)}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k + b_4^{(k)}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k) + A_3^{(k)s}e^{-\alpha^{(k)}\lambda\zeta_k}(b_3^{(k)}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k +$$
$$+ b_4^{(k)}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k) + A_4^{(k)s}e^{-\alpha^{(k)}\lambda\zeta_k}(b_3^{(k)}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k - b_4^{(k)}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k)\Big]\varphi^{(k)s}(\eta_k)e^{-\lambda t_k},$$

$$\overset{p}{\sigma}{}_z^{(k)s} = \bar{E}_3^{(k)}\lambda\Big[A_1^{(k)s}e^{\alpha^{(k)}\lambda\zeta_k}(b_5^{(k)}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k - b_6^{(k)}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k) +$$
$$+A_2^{(k)s}e^{\alpha^{(k)}\lambda\zeta_{kл}}(b_5^{(k)}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k + b_6^{(k)}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k) + A_3^{(k)s}e^{-\alpha^{(k)}\lambda\zeta_k}(b_5^{(k)}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k$$
$$+b_6^{(k)}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k) + A_4^{(k)s}e^{-\alpha^{(k)}\lambda\zeta_k}(b_5^{(k)}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k - b_6^{(k)}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k)\Big]\varphi^{(k)s}(\eta_k)e^{-\lambda t_k}$$

$$\overset{p}{\tau}{}_{xz}^{(k)s} = G_{31}^{(k)}\lambda\Big[A_1^{(k)s}e^{\alpha^{(k)}\lambda\zeta_k}(b_7^{(k)}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k - b_8^{(k)}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k) +$$
$$+A_2^{(k)s}e^{\alpha^{(k)}\lambda\zeta_k}(b_7^{(k)}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k + b_8^{(k)}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k) + A_3^{(k)s}e^{-\alpha^{(k)}\lambda\zeta_k}(-b_7^{(k)}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k$$
$$-b_8^{(k)}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k) + A_4^{(k)s}e^{-\alpha^{(k)}\lambda\zeta_k}(-b_7^{(k)}\sin\lambda\beta^{(k)}\zeta_k + b_8^{(k)}\cos\lambda\beta^{(k)}\zeta_k)\Big]\varphi^{(k)s}(\eta_k)e^{-\lambda t}$$

где

$$b_1^{(k)} = -1 + \mu_{13}^{(k)}(\alpha^{k}a^{(k)} - \beta^{(k)}b^{(k)}),\ b_2^{(k)} = \mu_{13}^{(k)}(\alpha^{(k)}b^{(k)} + \beta^{(k)}a^{(k)}),$$
$$b_3^{(k)} = -\mu_{21}^{(k)} + \mu_{23}^{(k)}(\alpha^{(k)}a^{(k)} - \beta^{(k)}b^{(k)}),\ b_4^{(k)} = \mu_{23}^{(k)}(\alpha^{(k)}b^{(k)} + \beta^{(k)}a^{(k)}),$$
$$b_5^{(k)} = -\mu_{31}^{(k)} + (\alpha^{(k)}a^{(k)} - \beta^{(k)}b^{(k)}),\ b_6^{(k)} = (\alpha^{(k)}b^{(k)} + \beta^{(k)}a^{(k)}),$$
$$b_7^{(k)} = \alpha^{(k)} - a^{(k)},\ b_8^{(k)} = \beta^{(k)} - b^{(k)}.$$

В различных вариантах решений (2.20), (2.22), (2.24) содержится неизвестный параметр λ, который определяется из условия существования ненулевого решения относительно постоянных $\boldsymbol{A_1^{(k)}}, \mathbf{K}, \boldsymbol{A_4^{(k)}}$. Для получения этого условия запишем краевые условия на лицевых поверхностях пластины $\overset{p}{\tau}{}_{xz}^{(1)s} = \overset{p}{\sigma}{}_z^{(1)s} = 0$ при $\zeta_1 = -\alpha_1$, $\overset{p}{\tau}{}_{xz}^{(n)s} = \overset{p}{\sigma}{}_z^{(n)s} = 0$ при $\zeta_n = \alpha_n$ и условий непрерывности функций $\overset{p}{u}{}^{(k)s}$, $\overset{p}{w}{}^{(k)s}$, $\overset{p}{\tau}{}_{xz}^{(k)s}$, $\overset{p}{\sigma}{}_z^{(k)s}$ на границе слоев (k) и (k+1) и выполнения условия $\varphi^{(k)s} = \varphi^{(k+1)s}$.

Для n-слойной пластины задача сводится к решению однородной алгебраической системы уравнений порядка 4n, которая имеет ненулевое решение только в том случае, когда определитель, составленный из коэффициентов этой системы уравнений, будет равен нулю. Задача сводится к собственной проблеме, которая для трехслойной пластины представляется в виде определителя 12 порядка, элементами которого являются тригонометрические и показательные функции. А если пластина имеет регулярное строение и можно отдельно рассматривать симметричную и кососимметричную задачи, то порядок определителя уменьшается в два раза.

Постоянные интегрирования $A_i^{(k)s} (i = 1,2,3,4)$ на каждом этапе определяются из краевых условий на торце x=0, которые учитывают и решение основного напряженного состояния.

Решение системы уравнений (2.5)-(2.6) при s≥2 сводится к решению неоднородной системы уравнений (2.9) с известной правой частью. Для системы уравнений (2.9) ищется полное решение, которое состоит из известного решения однородной задачи и частного решения неоднородной задачи, в котором участвует перемещение v, определяемое из вспомогательной задачи.

После решения основной задачи (2.9) при s=0,1 переходим к решению вспомогательной задачи (2.7)-(2.8), которая сводится к неоднородному уравнению относительно перемещения $\overset{p}{v}{}^{(k)s}$, решение которого представим в виде:

$$\overset{p}{v}{}^{(k)s}(t_k, z_k, h_k) = \overset{p}{u}{}_2^{(k)s}(z_k)\frac{dj^{(k)s}}{dh_k}e^{-lt_k}. \tag{2.26}$$

Функция $\overset{p}{u}{}_2^{(k)s}$ определяется из неоднородного уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2 \overset{p}{u}{}_2^{(k)s}}{dz_k^2} + \frac{G_{12}^{(k)}}{G_{32}^{(k)}} l^2 \overset{p}{u}{}_2^{(k)s} = \overset{p}{R}{}_{\text{v}}^{(k)s}, \tag{2.27}$$

где $\overset{p}{R}{}_{\text{v}}^{(k)s} = \frac{G_{12}^{(k)} + m_{21}^{(k)}\overline{E}_2^{(k)}}{G_{32}^{(k)}} l\, \overset{p}{u}{}_1^{(k)s} - \frac{G_{32}^{(k)} + m_{23}^{(k)}\overline{E}_2^{(k)}}{G_{32}^{(k)}} \frac{d\overset{p}{u}{}_3^{(k)s}}{dz_k} - \frac{\overline{E}_2^{(k)}}{G_{32}^{(k)}} \overset{p}{u}{}_2^{(k)s-2} \left(\frac{dj^{(k)s}}{dh_k}\right)^{-1} \frac{d^3 j^{(k)s-2}}{dh_k^3}$

Полное решение уравнения (2.27) представим в виде:

$$\overset{p}{u}{}_2^{(k)s} = B_1^{(k)s} \cos\sqrt{\frac{G_{12}^{(k)}}{G_{32}^{(k)}}}\, l z_k + B_2^{(k)s} \sin\sqrt{\frac{G_{12}^{(k)}}{G_{32}^{(k)}}}\, l z_k + \overset{p}{u}{}_2^{(k)s*}, \tag{2.28}$$

где $\overset{p}{u}{}_2^{(k)s*}$ – частное решение уравнения (2.27) при известной правой части.

Постоянные $B_1^{(k)s}, B_2^{(k)s}$ находятся из краевых условий на лицевых поверхностях для $\overset{p}{t}{}_{yx}^{(k)s}$ и условий непрерывности функций $\overset{p}{\text{v}}{}^{(k)s}, \overset{p}{t}{}_{yz}^{(k)}$ по толщине пластины. При s≥2 в правую часть $\overset{p}{R}{}_{\text{v}}^{(k)s}$ добавляется еще одно слагаемое, из которого следует $j^{(k)s} = \frac{d^2 j^{(k)s-2}}{dh_k^2}$. Таким образом выполняются все уравнения теории упругости для краевой плоской деформации.

Из решения (2.28) следует, что на краю x=const имеют место ненулевое перемещение $\overset{p}{\text{v}}{}^{(k)s}$ и напряжение $\overset{p}{t}{}_{xy}^{(k)s}$, которые сопутствуют плоскому погранслою и могут быть сняты только антиплоским погранслоем.

Таким образом, задача по определению погранслоя в многослойных конструкциях сводится к собственной проблеме и решению соответствующих трансцендентных уравнений. Покажем получение соответствующих уравнений для двух и трехслойных пластин.

3. Общий определитель для трехслойной пластины, являющийся условием существования ненулевых решений при определении $A_i^{(k)} (k = 1,2,3)$, содержит четыре краевых условия на лицевых плоскостях: при $z_1 = -a_1$ $t_{xz}^{(1)} = s_z^{(1)} = 0$, при $z_3 = a_3$ $t_{xz}^{(3)} = s_z^{(3)} = 0$ и условий непрерывности функций перемещений u, w и напряжений t_{xz}, s_z при переходе от слоя (k) к слою (k+1). Такая структура условий позволяет упростить общую процедуру раскрытия определителя и выполнить ее поэтапно. На первом этапе используются только условия условия непрерывности функций при переходе от слоя (k) к слою (k+1). Этих условий четыре, что позволяет выразить $A_i^{(k)s}$ через $A_i^{(k+1)s}$ на “карандаше”. Эти выражения имеют вид:

$$A_i^{(k)s} = \sum_{j=1}^{4} \prod\nolimits_{ij}^{(k)-(k+1)} A_j^{(k+1)s} \qquad (i = 1,\ldots 4) \tag{3.1}$$

Для задачи Б матрица перехода от слоя (k) к слою (k+1) определяется соотношениями:

$$\begin{aligned}
\Pi_{11}^{(k)-(k+1)} &= k_5^{(k)-(k+1)} \sin\lambda\beta_1^{(k)}\alpha_k \sin\lambda\beta_1^{(k+1)}\alpha_{k+1} + k_7^{(k)-(k+1)} \cos\lambda\beta_1^{(k)}\alpha_k \cos\lambda\beta_1^{(k+1)}\alpha_{k+1}\\
\Pi_{12}^{(k)-(k+1)} &= k_5^{(k)-(k+1)} \sin\lambda\beta_1^{(k)}\alpha_k \cos\lambda\beta_1^{(k+1)}\alpha_{k+1} - k_7^{(k)-(k+1)} \cos\lambda\beta_1^{(k)}\alpha_k \sin\lambda\beta_1^{(k+1)}\alpha_{k+1}\\
\Pi_{13}^{(k)-(k+1)} &= k_6^{(k)-(k+1)} \sin\lambda\beta_1^{(k)}\alpha_k \sin\lambda\beta_2^{(k+1)}\alpha_{k+1} + k_8^{(k)-(k+1)} \cos\lambda\beta_1^{(k)}\alpha_k \cos\lambda\beta_2^{(k+1)}\alpha_{k+1}\\
\Pi_{14}^{(k)-(k+1)} &= k_6^{(k)-(k+1)} \sin\lambda\beta_1^{(k)}\alpha_k \cos\lambda\beta_2^{(k+1)}\alpha_{k+1} - k_8^{(k)-(k+1)} \cos\lambda\beta_1^{(k)}\alpha_k \sin\lambda\beta_2^{(k+1)}\alpha_{k+1}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

где

$$\Pi_{21}^{(k)-(k+1)} = -k_5^{(k)-(k+1)} \cos\lambda\beta_1^{(k)}\alpha_k \sin\lambda\beta_1^{(k+1)}\alpha_{k+1} + k_7^{(k)-(k+1)} \sin\lambda\beta_1^{(k)}\alpha_k \cos\lambda\beta_1^{(k+1)}\alpha_{k+}$$
$$\Pi_{22}^{(k)-(k+1)} = -k_5^{(k)-(k+1)} \cos\lambda\beta_1^{(k)}\alpha_k \cos\lambda\beta_1^{(k+1)}\alpha_{k+1} - k_7^{(k)-(k+1)} \sin\lambda\beta_1^{(k)}\alpha_k \sin\lambda\beta_1^{(k+1)}\alpha_{k+}$$
$$\Pi_{23}^{(k)-(k+1)} = -k_6^{(k)-(k+1)} \cos\lambda\beta_1^{(k)}\alpha_k \sin\lambda\beta_2^{(k+1)}\alpha_{k+1} + k_8^{(k)-(k+1)} \sin\lambda\beta_1^{(k)}\alpha_k \cos\lambda\beta_2^{(k+1)}\alpha_{k+}$$
$$\Pi_{24}^{(k)-(k+1)} = -k_6^{(k)-(k+1)} \cos\lambda\beta_1^{(k)}\alpha_k \cos\lambda\beta_2^{(k+1)}\alpha_{k+1} - k_8^{(k)-(k+1)} \sin\lambda\beta_1^{(k)}\alpha_k \sin\lambda\beta_2^{(k+1)}\alpha_{k+}$$
$$\Pi_{31}^{(k)-(k+1)} = k_1^{(k)-(k+1)} \sin\lambda\beta_2^{(k)}\alpha_k \sin\lambda\beta_1^{(k+1)}\alpha_{k+1} + k_3^{(k)-(k+1)} \cos\lambda\beta_2^{(k)}\alpha_k \cos\lambda\beta_1^{(k+1)}\alpha_{k+1},$$
$$\Pi_{32}^{(k)-(k+1)} = k_1^{(k)-(k+1)} \sin\lambda\beta_2^{(k)}\alpha_k \cos\lambda\beta_1^{(k+1)}\alpha_{k+1} - k_3^{(k)-(k+1)} \cos\lambda\beta_2^{(k)}\alpha_k \sin\lambda\beta_1^{(k+1)}\alpha_{k+1},$$
$$\Pi_{33}^{(k)-(k+1)} = k_2^{(k)-(k+1)} \sin\lambda\beta_2^{(k)}\alpha_k \sin\lambda\beta_2^{(k+1)}\alpha_{k+1} + k_4^{(k)-(k+1)} \cos\lambda\beta_2^{(k)}\alpha_k \cos\lambda\beta_2^{(k+1)}\alpha_{k+1}$$
$$\Pi_{34}^{(k)-(k+1)} = k_2^{(k)-(k+1)} \sin\lambda\beta_2^{(k)}\alpha_k \cos\lambda\beta_2^{(k+1)}\alpha_{k+1} - k_4^{(k)-(k+1)} \cos\lambda\beta_2^{(k)}\alpha_k \sin\lambda\beta_2^{(k+1)}\alpha_{k+1}$$
$$\Pi_{41}^{(k)-(k+1)} = -k_1^{(k)-(k+1)} \cos\lambda\beta_2^{(k)}\alpha_k \sin\lambda\beta_1^{(k+1)}\alpha_{k+1} + k_3^{(k)-(k+1)} \sin\lambda\beta_2^{(k)}\alpha_k \cos\lambda\beta_1^{(k+1)}\alpha_{k-}$$
$$\Pi_{42}^{(k)-(k+1)} = -k_1^{(k)-(k+1)} \cos\lambda\beta_2^{(k)}\alpha_k \cos\lambda\beta_1^{(k+1)}\alpha_{k+1} + k_3^{(k)-(k+1)} \sin\lambda\beta_2^{(k)}\alpha_k \sin\lambda\beta_1^{(k+1)}\alpha_{k-}$$
$$\Pi_{43}^{(k)-(k+1)} = -k_2^{(k)-(k+1)} \cos\lambda\beta_2^{(k)}\alpha_k \sin\lambda\beta_2^{(k+1)}\alpha_{k+1} + k_4^{(k)-(k+1)} \sin\lambda\beta_2^{(k)}\alpha_k \cos\lambda\beta_2^{(k+1)}\alpha_{k-}$$
$$\Pi_{44}^{(k)-(k+1)} = -k_2^{(k)-(k+1)} \cos\lambda\beta_2^{(k)}\alpha_k \cos\lambda\beta_2^{(k+1)}\alpha_{k+1} - k_4^{(k)-(k+1)} \sin\lambda\beta_2^{(k)}\alpha_k \sin\lambda\beta_2^{(k+1)}\alpha_{k-}$$

где

$$k_1^{(k)-(k+1)} = \left(\frac{q_1^{(k+1)}}{q_1^{(k)}} - \frac{\overline{E}_3^{(k+1)}}{\overline{E}_3^{(k)}}\frac{b_5^{(k+1)}}{b_5^{(k)}}\right) \Big/ \left(\frac{b_6^{(k)}}{b_5^{(k)}} - \frac{q_2^{(k)}}{q_1^{(k)}}\right), \qquad k_5^{(k)-(k+1)} = \left(\frac{q_1^{(k+1)}}{q_2^{(k)}} - \frac{\overline{E}_3^{(k+1)}}{\overline{E}_3^{(k)}}\frac{b_5^{(k+1)}}{b_6^{(k)}}\right) \Big/ \left(\frac{b_5^{(k)}}{b_6^{(k)}} - \frac{q_1^{(k)}}{q_2^{(k)}}\right),$$
$$k_2^{(k)-(k+1)} = \left(\frac{q_2^{(k+1)}}{q_1^{(k)}} - \frac{\overline{E}_3^{(k+1)}}{\overline{E}_3^{(k)}}\frac{b_6^{(k+1)}}{b_5^{(k)}}\right) \Big/ \left(\frac{b_6^{(k)}}{b_5^{(k)}} - \frac{q_2^{(k)}}{q_1^{(k)}}\right), \qquad k_6^{(k)-(k+1)} = \left(\frac{q_2^{(k+1)}}{q_1^{(k)}} - \frac{\overline{E}_3^{(k+1)}}{\overline{E}_3^{(k)}}\frac{b_6^{(k+1)}}{b_6^{(k)}}\right) \Big/ \left(\frac{b_5^{(k)}}{b_6^{(k)}} - \frac{q_1^{(k)}}{q_2^{(k)}}\right),$$
$$k_3^{(k)-(k+1)} = \left(1 - \frac{G_{31}^{(k+1)}}{G_{31}^{(k)}}\frac{b_7^{(k+1)}}{b_7^{(k)}}\right) \Big/ \left(1 - \frac{b_8^{(k)}}{b_7^{(k)}}\right), \qquad k_7^{(k)-(k+1)} = \left(1 - \frac{G_{31}^{(k+1)}}{G_{31}^{(k)}}\frac{b_7^{(k+1)}}{b_8^{(k)}}\right) \Big/ \left(1 - \frac{b_7^{(k)}}{b_8^{(k)}}\right), \tag{3.3}$$
$$k_4^{(k)-(k+1)} = \left(1 - \frac{G_{31}^{(k+1)}}{G_{31}^{(k)}}\frac{b_8^{(k+1)}}{b_7^{(k)}}\right) \Big/ \left(1 - \frac{b_8^{(k)}}{b_7^{(k)}}\right), \qquad k_8^{(k)-(k+1)} = \left(1 - \frac{G_{31}^{(k+1)}}{G_{31}^{(k)}}\frac{b_8^{(k+1)}}{b_8^{(k)}}\right) \Big/ \left(1 - \frac{b_7^{(k)}}{b_8^{(k)}}\right).$$

Для двухслойной пластины осталось выполнить однородные статические краевые условия на лицевых поверхностях. Эти условия приводят к алгебраической системе уравнений:

$$\begin{aligned}
&b_7^{(1)}A_1^{(1)s}\cos l b_1^{(1)}a_1 - b_7^{(1)}A_2^{(1)s}\sin l b_1^{(1)}a_1 + b_8^{(1)}A_3^{(1)s}\cos l b_2^{(1)}a_1 - b_8^{(1)}A_4^{(1)s}\sin l b_2^{(1)}a_1 = 0,\\
&b_5^{(1)}A_1^{(1)s}\sin l b_1^{(1)}a_1 + b_5^{(1)}A_2^{(1)s}\cos l b_1^{(1)}a_1 + b_6^{(1)}A_3^{(1)s}\sin l b_2^{(1)}a_1 + b_6^{(1)}A_4^{(1)s}\cos l b_2^{(1)}a_1 = 0,\\
&b_7^{(2)}A_1^{(2)s}\cos l b_1^{(2)}a_2 + b_7^{(2)}A_2^{(2)s}\sin l b_1^{(2)}a_2 + b_8^{(2)}A_3^{(2)s}\cos l b_2^{(2)}a_2 + b_8^{(2)}A_4^{(2)s}\sin l b_2^{(2)}a_2 = 0,\\
&b_5^{(2)}A_1^{(2)s}\sin l b_1^{(2)}a_2 - b_5^{(2)}A_2^{(2)s}\cos l b_1^{(2)}a_2 + b_6^{(2)}A_3^{(2)s}\sin l b_2^{(2)}a_2 - b_6^{(2)}A_4^{(2)s}\cos l b_2^{(2)}a_2 = 0.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

В системе уравнений (3.4) постоянные интегрирования $A_i^{(1)s} (i = 1, \mathbf{K}, 4)$ выражаются через $A_i^{(2)s}$ по соотношениям (3.1), что приводит к определителю:

$$Det\begin{vmatrix}
F_1 \sin l b_1^{(2)}a_2 + F_2 \cos l b_1^{(2)}a_2 & F_1\cos\lambda\beta_1^{(2)}\alpha_2 - F_2\sin\lambda\beta_1^{(2)}\alpha_2\\
F_5 \sin l b_1^{(2)}a_2 - F_6 \cos l b_1^{(2)}a_2 & F_5\cos\lambda\beta_1^{(2)}\alpha + F_6\sin\lambda\beta_1^{(2)}\alpha_2\\
b_7^{(2)}\cos l b_1^{(2)}a_2 & b_7^{(2)}\sin\lambda\beta_1^{(2)}\alpha_2\\
b_5^{(2)}\sin l b_1^{(2)}a_2 & -b_5^{(2)}\cos\lambda\beta_1^{(2)}\alpha_2
\end{vmatrix} \tag{3.5}$$

$$\begin{vmatrix} F_3\sin\lambda\beta_2^{(2)}\alpha_2+F_4\cos\lambda\beta_2^{(2)}\alpha_2 & F_3\cos\lambda\beta_2^{(2)}\alpha_2-F_4\sin\lambda\beta_2^{(2)}\alpha_2 \\ F_7\sin\lambda\beta_2^{(2)}\alpha_2-F_8\cos\lambda\beta_2^{(2)}\alpha_2 & F_7\cos\lambda\beta_2^{(2)}\alpha_2+F_8\sin\lambda\beta_2^{(2)}\alpha_2 \\ b_8^{(2)}\cos\lambda\beta_2^{(2)}\alpha_2 & b_8^{(2)}\sin\lambda\beta_2^{(2)}\alpha_2 \\ b_6^{(2)}\sin\lambda\beta_2^{(2)}\alpha_2 & -b_6^{(2)}\cos\lambda\beta_2^{(2)}\alpha_2 \end{vmatrix}=0$$

где

$$\begin{aligned}
F_1(\lambda,\beta_1^{(1)},\beta_2^{(1)},\alpha_1)&=b_7^{(1)}k_5^{(1)-(2)}\sin 2\lambda\beta_1^{(1)}\alpha_1+b_8^{(1)}k_1^{(1)-(2)}\sin 2\lambda\beta_2^{(1)}\alpha_1,\\
F_2(\lambda,\beta_1^{(1)},\beta_2^{(1)},\alpha_1)&=b_7^{(1)}k_7^{(1)-(2)}\cos 2\lambda\beta_1^{(1)}\alpha_1+b_8^{(1)}k_3^{(1)-(2)}\cos 2\lambda\beta_2^{(1)}\alpha_1,\\
F_3(\lambda,\beta_1^{(1)},\beta_2^{(1)},\alpha_1)&=b_7^{(1)}k_6^{(1)-(2)}\sin 2\lambda\beta_1^{(1)}\alpha_1+b_8^{(1)}k_2^{(1)-(2)}\sin 2\lambda\beta_2^{(1)}\alpha_1,\\
F_4(\lambda,\beta_1^{(1)},\beta_2^{(1)},\alpha_1)&=b_7^{(1)}k_8^{(1)-(2)}\cos 2\lambda\beta_1^{(1)}\alpha_1+b_8^{(1)}k_4^{(1)-(2)}\cos 2\lambda\beta_2^{(1)}\alpha_1,\\
F_5(\lambda,\beta_1^{(1)},\beta_2^{(1)},\alpha_1)&=b_5^{(1)}k_5^{(1)-(2)}\cos 2\lambda\beta_1^{(1)}\alpha_1+b_6^{(1)}k_1^{(1)-(2)}\cos 2\lambda\beta_2^{(1)}\alpha_1,\\
F_6(\lambda,\beta_1^{(1)},\beta_2^{(1)},\alpha_1)&=b_5^{(1)}k_7^{(1)-(2)}\sin 2\lambda\beta_1^{(1)}\alpha_1+b_6^{(1)}k_3^{(1)-(2)}\sin 2\lambda\beta_2^{(1)}\alpha_1,\\
F_7(\lambda,\beta_1^{(1)},\beta_2^{(1)},\alpha_1)&=b_5^{(1)}k_6^{(1)-(2)}\cos 2\lambda\beta_1^{(1)}\alpha_1+b_6^{(1)}k_2^{(1)-(2)}\cos 2\lambda\beta_2^{(1)}\alpha_1,\\
F_8(\lambda,\beta_1^{(1)},\beta_2^{(1)},\alpha_1)&=b_5^{(1)}k_8^{(1)-(2)}\sin 2\lambda\beta_1^{(1)}\alpha_1+b_6^{(1)}k_4^{(1)-(2)}\sin 2\lambda\beta_2^{(1)}\alpha_1,
\end{aligned}\tag{3.6}$$

Определитель (3.5) раскрывается точно и приводит к уравнению:

$$\begin{aligned}
&b_6^{(2)}b_8^{(2)}(F_2F_5+F_1F_6)+b_5^{(2)}b_7^{(2)}(F_4F_7+F_3F_8)-\\
&-b_6^{(2)}b_7^{(2)}\Big[\big(-F_1\cos 2lb_1^{(2)}a_2+F_2\sin 2lb_1^{(2)}a_2\big)\big(F_7\sin 2lb_2^{(2)}a_2-F_8\cos 2lb_2^{(2)}a_2\big)+\\
&\quad+\big(F_5\cos 2lb_1^{(2)}a_2+F_6\sin 2lb_1^{(2)}a_2\big)\big(F_3\sin 2lb_2^{(2)}a_2+F_4\cos 2lb_2^{(2)}a_2\big)\Big]-\\
&-b_5^{(2)}b_8^{(2)}\Big[\big(F_1\sin 2lb_1^{(2)}a_2+F_2\cos 2lb_1^{(2)}a_2\big)\cdot\big(F_7\cos 2lb_2^{(2)}a_2+F_8\sin 2lb_2^{(2)}a_2\big)+\\
&\quad+\big(F_5\sin 2lb_1^{(2)}a_2-F_6\cos 2lb_1^{(2)}a_2\big)\big(-F_3\cos 2lb_2^{(2)}a_2+F_4\sin 2lb_2^{(2)}a_2\big)\Big]=0.
\end{aligned}\tag{3.7}$$

Для трехслойной пластины необходимо воспользоваться матрицей преобразований (3.1) дважды: сначала выразить $A_i^{(1)s}$ через $A_j^{(2)s}$, а последние через $A_k^{(3)s}$. Тогда остается выполнить только статические краевые условия при $z_1=-a_1$, $z_3=a_3$, которые приводят к определителю, аналогичному (3.5):

$$Det\begin{vmatrix} \Phi_1\sin\lambda\beta_1^{(3)}\alpha_3+\Phi_2\cos\lambda\beta_1^{(3)}\alpha_3 & \Phi_1\cos\lambda\beta_1^{(3)}\alpha_3-\Phi_2\sin\lambda\beta_1^{(3)}\alpha_3 \\ \Phi_5\sin\lambda\beta_1^{(3)}\alpha_3-\Phi_6\cos\lambda\beta_1^{(3)}\alpha_3 & \Phi_5\cos\lambda\beta_1^{(3)}\alpha_3+\Phi_3\sin\lambda\beta_1^{(3)}\alpha_3 \\ b_7^{(3)}\cos\lambda\beta_1^{(3)}\alpha_3 & b_7^{(3)}\sin\lambda\beta_1^{(3)}\alpha_3 \\ b_5^{(3)}\sin\lambda\beta_1^{(3)}\alpha_3 & -b_5^{(3)}\cos\lambda\beta_1^{(3)}\alpha_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \Phi_3\sin\lambda\beta_2^{(3)}\alpha_3+\Phi_4\cos\lambda\beta_2^{(3)}\alpha_3 & \Phi_3\cos\lambda\beta_2^{(3)}\alpha_3-\Phi_4\sin\lambda\beta_2^{(3)}\alpha_3 \\ \Phi_7\sin\lambda\beta_2^{(3)}\alpha_3-\Phi_8\cos\lambda\beta_2^{(3)}\alpha_3 & \Phi_7\cos\lambda\beta_2^{(3)}\alpha_3+\Phi_8\sin\lambda\beta_2^{(3)}\alpha_3 \\ b_8^{(3)}\cos\lambda\beta_2^{(3)}\alpha_3 & b_8^{(3)}\sin\lambda\beta_2^{(3)}\alpha_3 \\ b_6^{(3)}\sin\lambda\beta_2^{(3)}\alpha_3 & -b_6^{(2)}\cos\lambda\beta_2^{(3)}\alpha_3 \end{vmatrix}=0 \tag{3.8}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
&\Phi_1(l,a_1,a_2)=k_5^{(2)-(3)}(F_2\sin 2l b_1^{(2)}a_2-F_1\cos 2l b_1^{(2)}a_2)+k_1^{(2)-(3)}(F_4\sin 2l b_2^{(2)}a_2-F_3\cos 2l b_2^{(2)}a_2),\\
&\Phi_2(l,a_1,a_2)=k_7^{(2)-(3)}(F_2\cos 2l b_1^{(2)}a_2+F_1\sin 2l b_1^{(2)}a_2)+k_3^{(2)-(3)}(F_4\cos 2l b_2^{(2)}a_2+F_3\sin 2l b_2^{(2)}a_2),\\
&\Phi_3(l,a_1,a_2)=k_6^{(2)-(3)}(F_2\sin 2l b_1^{(2)}a_2-F_1\cos 2l b_1^{(2)}a_2)+k_2^{(2)-(3)}(F_4\sin 2l b_2^{(2)}a_2-F_3\cos 2l b_2^{(2)}a_2),\\
&\Phi_4(l,a_1,a_2)=k_8^{(2)-(3)}(F_2\cos 2l b_1^{(2)}a_2+F_1\sin 2l b_1^{(2)}a_2)+k_4^{(2)-(3)}(F_4\cos 2l b_2^{(2)}a_2+F_3\sin 2l b_2^{(2)}a_2),\\
&\Phi_5(\lambda,\alpha_1,\alpha_2)=k_5^{(2)-(3)}(F_6\sin 2\lambda\beta_1^{(2)}\alpha_2+F_5\cos 2\lambda\beta_1^{(2)}\alpha_2)+k_1^{(2)-(3)}(F_8\sin 2\lambda\beta_2^{(2)}\alpha_2+F_7\cos 2\lambda\beta_2^{(2)}\alpha_2),\\
&\Phi_6(\lambda,\alpha_1,\alpha_2)=k_7^{(2)-(3)}(-F_6\cos 2\lambda\beta_1^{(2)}\alpha_2+F_5\sin 2\lambda\beta_1^{(2)}\alpha_2)+k_3^{(2)-(3)}(-F_8\cos 2\lambda\beta_2^{(2)}\alpha_2+F_7\sin 2\lambda\beta_2^{(2)}\alpha_2),\\
&\Phi_7(\lambda,\alpha_1,\alpha_2)=k_6^{(2)-(3)}(F_6\sin 2\lambda\beta_1^{(2)}\alpha_2+F_5\cos 2\lambda\beta_1^{(2)}\alpha_2)+k_2^{(2)-(3)}(F_8\sin 2\lambda\beta_2^{(2)}\alpha_2+F_7\cos 2\lambda\beta_2^{(2)}\alpha_2),\\
&\Phi_8(\lambda,\alpha_1,\alpha_2)=k_8^{(2)-(3)}(-F_6\cos 2\lambda\beta_1^{(2)}\alpha_2+F_5\sin 2\lambda\beta_1^{(2)}\alpha_2)+k_4^{(2)-(3)}(-F_8\cos 2\lambda\beta_2^{(2)}\alpha_2-F_7\sin 2\lambda\beta^{(2)}\alpha_2),
\end{aligned} \qquad (3.9)$$

Для трехслойной пластины уравнение краевой плоской деформации описывается уравнением:

$$\begin{aligned}
&b_6^{(3)}b_8^{(3)}(\Phi_2\Phi_5+\Phi_1\Phi_6)+b_5^{(3)}b_7^{(3)}(\Phi_4\Phi_7+\Phi_3\Phi_8)-\\
&-b_6^{(3)}b_7^{(3)}\Big[\big(-\Phi_1\cos 2l b_1^{(3)}a_3+\Phi_2\sin 2l b_1^{(3)}a_3\big)\big(\Phi_7\sin 2l b_2^{(3)}a_3-\Phi_8\cos 2l b_2^{(3)}a_3\big)+\\
&\quad+\big(\Phi_5\cos 2l b_1^{(3)}a_3+\Phi_6\sin 2l b_1^{(3)}a_3\big)\big(\Phi_3\sin 2l b_2^{(3)}a_3+\Phi_4\cos 2l b_2^{(3)}a_3\big)\Big]-\\
&-b_5^{(3)}b_8^{(3)}\Big[\big(\Phi_1\sin 2l b_1^{(3)}a_3+\Phi_2\cos 2l b_1^{(3)}a_3\big)\big(\Phi_7\cos 2l b_2^{(3)}a_3+\Phi_8\sin 2l b_2^{(3)}a_3\big)+\\
&\quad+\big(\Phi_5\sin 2l b_1^{(3)}a_3-\Phi_6\cos 2l b_1^{(3)}a_3\big)\big(-\Phi_3\cos 2l b_2^{(3)}a_3+\Phi_4\sin 2l b_2^{(3)}a_3\big)\Big]=0.
\end{aligned} \qquad (3.10)$$

4. Для основных величин антиплоской деформации, для которой вводим верхний индекс “a”, принимаем решение в виде асимптотических рядов:

$$(\overset{a}{t}{}_{xy}^{(k)},\overset{a}{t}{}_{yz}^{(k)})=\sum_{s=0}e^{q_a}(\overset{a}{t}{}_{xy}^{(k)s},\overset{a}{t}{}_{yz}^{(k)s}),\ \ \overset{a}{\mathrm{v}}{}^{(k)}=\sum_{s=0}e^{q_a+1}\,\overset{a}{\mathrm{v}}{}^{(k)s}, \qquad (4.1)$$

а для вспомогательных величин:

$$\begin{aligned}
&(\overset{a}{s}{}_{x}^{(k)},\overset{a}{s}{}_{y}^{(k)},\overset{a}{s}{}_{z}^{(k)},\overset{a}{t}{}_{xz}^{(k)})=\sum_{s=0}e^{q_a+1}(\overset{a}{s}{}_{x}^{(k)s},\overset{a}{s}{}_{y}^{(k)s},\overset{a}{s}{}_{z}^{(k)s},\overset{a}{t}{}_{xz}^{(k)s}),\\
&(\overset{a}{u}{}^{(k)},\overset{a}{w}{}^{(k)})=\sum e^{q_a+2}(\overset{a}{u}{}^{(k)s},\overset{a}{w}{}^{(k)s}),
\end{aligned} \qquad (4.2)$$

где $q_a=s+k_a$. Параметр находится при согласовании краевых условий.

После подстановки (3.1)-(3.2) в уравнения равновесия (1.5) и соотношения упругости (1.6) имеем уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \overset{a}{s}{}_{x}^{(k)s}}{\partial t_k}+\frac{\partial \overset{a}{t}{}_{xy}^{(k)s}}{\partial h_k}+\frac{\partial \overset{a}{t}{}_{xz}^{(k)s}}{\partial z_k}=0,\ \frac{\partial \overset{a}{t}{}_{xy}^{(k)s}}{\partial t_k}+\frac{\partial \overset{a}{s}{}_{y}^{(k)s-2}}{\partial h_k}+\frac{\partial \overset{a}{t}{}_{yz}^{(k)s}}{\partial z_k}=0,\\
&\frac{\partial \overset{a}{t}{}_{xz}^{(k)s}}{\partial t_k}+\frac{\partial \overset{a}{t}{}_{yz}^{(k)s}}{\partial h_k}+\frac{\partial \overset{a}{s}{}_{z}^{(k)s}}{\partial z_k}=0
\end{aligned} \qquad (4.3)$$

и соотношения упругости:

$$\overset{a}{s}{}_{x}^{(k)s}=B_{11}^{(k)}\frac{\partial \overset{a}{u}{}^{(k)s}}{\partial t_k}+B_{12}^{(k)}\frac{\partial \overset{a}{\mathrm{v}}{}^{(k)s}}{\partial h_k}+B_{13}^{(k)}\frac{\partial \overset{a}{w}{}^{(k)s}}{\partial z_k},\quad \overset{a}{s}{}_{y}^{(k)s}=B_{21}^{(k)}\frac{\partial \overset{a}{u}{}^{(k)s}}{\partial t_k}+B_{22}^{(k)}\frac{\partial \overset{a}{\mathrm{v}}{}^{(k)s}}{\partial h_k}+B_{23}^{(k)}\frac{\partial \overset{a}{w}{}^{(k)s}}{\partial z_k},$$

$$\overset{a}{s}{}_{z}^{(k)s}=B_{31}^{(k)}\frac{\partial \overset{a}{u}{}^{(k)s}}{\partial t_k}+B_{32}^{(k)}\frac{\partial \overset{a}{\mathrm{v}}{}^{(k)s}}{\partial h_k}+B_{33}^{(k)}\frac{\partial \overset{a}{w}{}^{(k)s}}{\partial z_k},\quad \overset{a}{t}{}_{xy}^{(k)s}=G_{12}^{(k)}\left(\frac{\partial \overset{a}{u}{}^{(k)s-2}}{\partial h_k}+\frac{\partial \overset{a}{\mathrm{v}}{}^{(k)s}}{\partial t_k}\right), \tag{4.4}$$

$$\overset{a}{t}{}_{xz}^{(k)s}=G_{31}^{(k)}\left(\frac{\partial \overset{a}{w}{}^{(k)s}}{\partial t_k}+\frac{\partial \overset{a}{\mathrm{u}}{}^{(k)s}}{\partial z_k}\right),\quad \overset{a}{t}{}_{yz}^{(k)s}=G_{23}^{(k)}\left(\frac{\partial \overset{a}{w}{}^{(k)s-2}}{\partial h_k}+\frac{\partial \overset{a}{\mathrm{v}}{}^{(k)s}}{\partial z_k}\right).$$

Система уравнений (3.3)-(3.4) также распадается на основную и вспомогательную задачи. Для основной задачи имеем уравнение равновесия:

$$\frac{\partial \overset{a}{t}{}_{xy}^{(k)s}}{\partial t_k}+\frac{\partial \overset{a}{s}{}_{y}^{(k)s-2}}{\partial h_k}+\frac{\partial \overset{a}{t}{}_{yz}^{(k)s}}{\partial z_k}=0 \tag{4.5}$$

и соотношения упругости:

$$\overset{a}{t}{}_{xz}^{(k)s}=G_{12}^{(k)}\left(\frac{\partial \overset{a}{u}{}^{(k)s-2}}{\partial h_k}+\frac{\partial \overset{a}{\mathrm{v}}{}^{(k)s}}{\partial t_k}\right),\qquad \overset{a}{t}{}_{yz}^{(k)s}=G_{23}^{(k)}\left(\frac{\partial \overset{a}{w}{}^{(k)s-2}}{\partial h_k}+\frac{\partial \overset{a}{\mathrm{v}}{}^{(k)s}}{\partial z_k}\right). \tag{4.6}$$

Вспомогательная система содержит следующие уравнения:

$$\frac{\partial \overset{a}{s}{}_{x}^{(k)s}}{\partial t_k}+\frac{\partial \overset{a}{t}{}_{xy}^{(k)s}}{\partial h_k}+\frac{\partial \overset{a}{t}{}_{yz}^{(k)s}}{\partial z_k}=0,\quad \frac{\partial \overset{a}{t}{}_{xz}^{(k)s}}{\partial t_k}+\frac{\partial \overset{a}{t}{}_{yz}^{(k)s}}{\partial h_k}+\frac{\partial \overset{a}{s}{}_{z}^{(k)s}}{\partial z_k}=0 \tag{4.7}$$

и соотношения упругости:

$$\overset{a}{s}{}_{x}^{(k)s}=B_{11}^{(k)}\frac{\partial \overset{a}{u}{}^{(k)s}}{\partial t_k}+B_{12}^{(k)}\frac{\partial \overset{a}{\mathrm{v}}{}^{(k)s}}{\partial h_k}+B_{13}^{(k)}\frac{\partial \overset{a}{w}{}^{(k)s}}{\partial z_k},\quad \overset{a}{s}{}_{y}^{(k)s}=B_{21}^{(k)}\frac{\partial \overset{a}{u}{}^{(k)s}}{\partial t_k}+B_{22}^{(k)}\frac{\partial \overset{a}{\mathrm{v}}{}^{(k)s}}{\partial h_k}+B_{23}^{(k)}\frac{\partial \overset{a}{w}{}^{(k)s}}{\partial z_k},$$

$$\overset{a}{s}{}_{z}^{(k)s}=B_{31}^{(k)}\frac{\partial \overset{a}{u}{}^{(k)s}}{\partial t_k}+B_{32}^{(k)}\frac{\partial \overset{a}{\mathrm{v}}{}^{(k)s}}{\partial h_k}+B_{33}^{(k)}\frac{\partial \overset{a}{w}{}^{(k)s}}{\partial z_k},\qquad \overset{a}{t}{}_{xz}^{(k)s}=G_{31}^{(k)}\left(\frac{\partial \overset{a}{w}{}^{(k)s}}{\partial t_k}+\frac{\partial \overset{a}{\mathrm{u}}{}^{(k)s}}{\partial z_k}\right). \tag{4.8}$$

Основная задача при определении антиплоского погранслоя сводится к нахождению перемещения $\overset{a}{\mathrm{v}}{}^{(k)}$ из уравнения:

$$\frac{\partial^2 \overset{a}{\mathrm{v}}{}^{(k)s}}{\partial t_k^2}+\frac{G_{12}^{(k)}}{G_{23}^{(k)}}\frac{\partial^2 \overset{a}{\mathrm{v}}{}^{(k)s}}{\partial z_k^2}=\overset{a}{R}{}_{b}^{(k)s-2}, \tag{4.9}$$

где

$$\overset{a}{R}{}_{\beta}^{(k)s-2}=-\frac{G_{12}^{(k)}+\mu_{21}^{(k)}\overline{E}_2^{(k)}}{G_{23}^{(k)}}\frac{\partial^2 \overset{a}{u}{}^{(k)s-2}}{\partial t_k\partial\eta_k}-\frac{\overline{E}_2^{(k)}}{G_{23}^{(k)}}\cdot\frac{\partial^2 \overset{a}{v}{}^{(k)s-2}}{\partial\eta_k^2}-\frac{G_{23}^{(k)}+\mu_{23}^{(k)}\overline{E}_2^{(k)}}{G_{23}^{(k)}}\cdot\frac{\partial^2 \overset{a}{w}{}^{(k)s-2}}{\partial\eta_k\partial\zeta_k} \tag{4.10}$$

Решение однородного уравнения при s=0,1 ищем в виде:

$$\overset{a}{v}{}^{(k)s}(t_k,\eta_k,\zeta_k)=\overset{a}{u}{}_2^{(k)s}(\zeta_k)F^{(k)s}(\eta_k)e^{-\mu t_k}, \tag{4.11}$$

где $\mu>0$ показатель изменяемости антиплоского погранслоя.

Из (3.9) вытекает, что при любых $F^{(k)s}$ для $\overset{a}{u}{}_2^{(k)s}(\zeta_k)$ решение имеет вид:

$$\overset{a}{u}{}_2^{(k)s}=C_1^{(k)s}\cos\sqrt{\frac{G_{12}^{(k)}}{G_{23}^{(k)}}}mz_k+C_2^{(k)s}\sin\sqrt{\frac{G_{12}^{(k)}}{G_{23}^{(k)}}}mz_k. \tag{4.12}$$

Напряжения $\overset{a}{t}{}_{xy}^{(k)s}$ и $\overset{a}{t}{}_{yz}^{(k)s}$ определяются соотношениями:

$$\begin{gathered}\overset{a}{t}{}_{xy}^{(k)s}=-G_{12}^{(k)}m\,\overset{a}{u}{}_2^{(k)s}(z_k)F^{(k)s}(h_k)e^{-mt_k},\\ \overset{a}{t}{}_{yz}^{(k)s}=-\sqrt{G_{12}^{(k)}G_{23}^{(k)}}m\left(C_1^{(k)s}\sin\sqrt{\frac{G_{12}^{(k)}}{G_{23}^{(k)}}}mz_k-C_2^{(k)s}\cos\sqrt{\frac{G_{12}^{(k)}}{G_{23}^{(k)}}}mz_k\right)F^{(k)s}(h_k)e^{-mt_k}.\end{gathered} \tag{4.13}$$

Задача решена с точностью до некоторой функции $F^{(k)s}(h_k)$.

Из сравнения основных задач плоского и антиплоского погранслоев видно, что антиплоский погранслой определяется значительно проще и сводится к уравнению типа уравнений гармонических колебаний.

Параметр μ находится из условий выполнения краевых условий на лицевых поверхностях и условий непрерывности функций $\overset{a}{\mathrm{v}}{}^{(k)s},\overset{a}{t}{}_{yz}^{(k)s}$ на границах слоев и $F^{(k)s}=F^{(k+1)s}$. Для однослойной пластины $\overset{a}{t}{}_{yz}^{s}=0$ при $z=\pm1$, что приводит к уравнению [2]

$$m^2\sin\sqrt{\frac{G_{12}}{G_{23}}}m\cdot\cos\sqrt{\frac{G_{12}}{G_{23}}}m=0,$$

которое имеет два нулевых корня. Для задачи симметричной по ζ решение уравнения $\sin\sqrt{G_{12}/G_{23}}m=0$ представляется в виде $m_n=np\sqrt{G_{23}/G_{12}}\ (n=1,2,\mathbf{K})$, а для кососимметричной задачи - $\cos\sqrt{G_{12}/G_{23}}m=0$ - в виде $m_n=\dfrac{2n-1}{2}p\sqrt{G_{23}/G_{12}}\ (n=1,2,\mathbf{K})$.

Эти результаты для однослойной пластины хорошо известны [2] и показывают сильную зависимость глубины проникновения погранслоя от отношения G_{23}/G_{12}. В литературе данный погранслой называется слабым в связи со значительным проникновением в глубь пластины.

5. С целью упрощения записи уравнений антиплоского погранслоя для многослойных пластин введем обозначения:

$$G_k^2=G_{12}^{(k)}G_{23}^{(k)},\quad K_k^2=G_{12}^{(k)}/G_{23}^{(k)}.$$

Для антиплоского погранслоя при переходе от слоя k к слою (k+1) должны выполняться только два условия стыковки: при $z_k=a_k$ и $z_{k+1}=-a_{k+1}$; $\mathrm{v}^{(k)s}=\mathrm{v}^{(k+1)s}$, $t_{yz}^{(k)s}=t_{yz}^{(k+1)s}$. На этом этапе рассматривается ма линейных алгебраических уравнений второго порядка, решение которой представляется в виде:

$$C_i^{(k)s}=\sum_{j=1}^{2}M_{ij}^{(k)-(k+1)}C_j^{(k+1)s}\qquad(i=1,2), \tag{5.1}$$

где матрица перехода определяется соотношениями:

$$M_{11}^{(k)-(k+1)} = \cos K_k ma_k \cos K_{k+1} ma_{k+1} - \frac{G_{k+1}}{G_k} \sin K_k ma_k \sin K_{k+1} ma_{k+1},$$
$$M_{12}^{(k)-(k+1)} = -\cos K_k ma_k \sin K_{k+1} ma_{k+1} - \frac{G_{k+1}}{G_k} \sin K_k ma_k \cos K_{k+1} ma_{k+1},$$
$$M_{21}^{(k)-(k+1)} = \sin K_k ma_k \cos K_{k+1} ma_{k+1} + \frac{G_{k+1}}{G_k} \cos K_k ma_k \sin K_{k+1} ma_{k+1},$$
$$M_{22}^{(k)-(k+1)} = -\sin K_k ma_k \sin K_{k+1} ma_{k+1} - \frac{G_{k+1}}{G_k} \cos K_k ma_k \cos K_{k+1} ma_{k+1}, \quad (5.2)$$

Для двухслойной пластины осталось выполнить два статических краевых условия на лицевых поверхностях при $z_1 = a_1$ $t_{yz}^{(k)s} = 0$ и при $z_2 = a_2$ $t_{yz}^{(k)s} = 0$. Эти условия приводят к уравнению:

$$(G_1 + G_2)\sin 2\mu(K_1\alpha_1 + K_2\alpha_2) + (G_1 - G_2)\sin 2\mu(K_1\alpha_1 - K_2\alpha_2) = 0. \quad (5.3)$$

Для трехслойной пластины необходимо воспользоваться матрицей преобразований (5.1) дважды. Тогда оставшиеся два статических краевых условия приводят при $G = G_1 G_3 / G_2$ к уравнению:

$$\begin{aligned}
&(G_1 + G_2 + G_3 + G)\sin 2m(K_1 a_1 + K_2 a_2 + K_3 a_3) + \\
&+ (-G_1 + G_2 + G_3 - G)\sin 2m(-K_1 a_1 + K_2 a_2 + K_3 a_3) + \\
&+ (G_1 - G_2 + G_3 - G)\sin 2m(K_1 a_1 - K_2 a_2 + K_3 a_3) + \\
&+ (G_1 + G_2 - G_3 - G)\sin 2m(K_1 a_1 + K_2 a_2 - K_3 a_3) = 0.
\end{aligned} \quad (5.4)$$

Для пластины с мягким средним слоем G>> G_k и тогда уравнение (5.4) приобретает вид:

$$\begin{aligned}
&\sin 2m(K_1 a_1 + K_2 a_2 + K_3 a_3) - \sin 2m(-K_1 a_1 + K_2 a_2 + K_3 a_3) - \\
&- \sin 2m(K_1 a_1 - K_2 a_2 + K_3 a_3) - \sin 2m(K_1 a_1 + K_2 a_2 - K_3 a_3) = 0.
\end{aligned} \quad (5.5)$$

Из уравнения (5.5) видно, что наибольшее влияние на проникновение погранслоя оказывает отношение $K_k = \sqrt{G_{12}^{(k)} / G_{23}^{(k)}}$, численное значение которого практически отсутствует в литературе для ортотропных материалов, хотя и отмечается, что для некоторых заполнителей $G_{12} >> G_{23}$.

Предложенный в статье точный аналитический метод решения задач погранслоев для многослойных пластин из ортотропного материала позволил впервые получить уравнения, описывающие погранслои в двух и трехслойных пластинах и требующие своего решения в дальнейшем. Для решения полученных трасцендентных уравнений возможно использование методов, изложенных в [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости //ПММ.1962.Т.2.Вып.4. - С.668-686.
2. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. - 414с.
3. Бутенко Ю.И. Вариационно-асимптотические методы построения неклассических методов расчета стержней и пластин. Казань: “Новое знание”, 2001. - 320 с.
4. Гусейн-Заде М.И. Напряженное состояние погранслоя для слоистых пластинок // Тр. Всесоюзн.конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1970. - С.638-649.
5. Артюхин Ю.М., Гурьянов Н.Г., Котляр Л.М. Система Математика 4.0 и ее приложения в механике. Казань-Набережные Челны. Изд-во КамПИ, 2002. - 415с.