УДК 624.23

А.У. Богданович

КРАЕВОЙ ЭФФЕКТ В ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ СЖАТИИ

Тонкостенные стержни переменного сечения привлекают всё бóльшее внимание теоретиков и конструкторов. Оптимизация конструкций и элементов конструкций по весу неизбежно приводит к созданию элементов самых разнообразных и подчас экзотических форм. Расчёт таких объектов на прочность и устойчивость далеко не прост даже при наличии современных стандартных программных пакетов для ЭВМ. Одна из причин затруднений - краевой эффект (быстрое изменение НДС элемента) в областях контакта элемента с другими элементами конструкции.

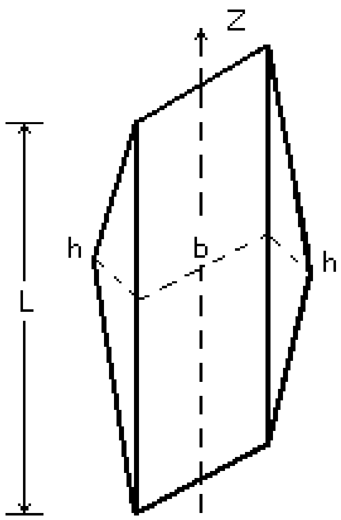

Рис.1. Тонкостенный стержень переменного сечения; b – ширина пластины; h – высота треугольника; толщина листа – t

Стержень [1], показанный на рис.1, предназначен для работы на продольное сжатие. Его центральная часть усилена на изгиб боковыми треугольными пластинами; ось центров тяжести сечений – прямая, совпадающая с осью центров изгиба, что при центральном сжатии даёт возможность избежать докритического стеснённого кручения стержня и, соответственно, увеличивает его устойчивость. Вырождение стержня на торцах в пластину позволяет легко и технологично соединять его с соседними элементами конструкции без заметного нарушения центровки на сжатие. В то же время, сравнительно небольшое количество материала в окрестности торцов отрицательно влияет не только на прочность стержня, но и на его устойчивость.

Уравнения устойчивости стержня под продольной нагрузкой P имеют вид:

$$EJ_w j^{IV} + EJ'_w j''' + k_1 j'' + k_2 j' + k_3 j -$$
$$- p(x_0 - e_x)\mathrm{v}'' + p(y_0 - e_y)u'' = 0 \qquad (1)$$

$$EJ_y(z)u^{IV} + 2EJ'_y(z)u''' + [p + EJ''_y(z)]u'' +$$
$$+ p(y_0 - e_y)j'' + k_4 j' + k_5 j = 0 \qquad (2)$$

$$EJ_x(z)\mathrm{v}^{IV} + 2EJ'_x(z)\mathrm{v}''' + [p + EJ''_x(z)]\mathrm{v}'' +$$
$$+ p(-x_0 + e_x)j'' + k_6 j' + k_7 j = 0 \qquad (3)$$

где

$$k_1 = -C - 2p[e_x(x_0 + R_y) +$$
$$+ e_y(y_0 + R_x) - r_0^2/2] \qquad (4)$$

$$k_2 = -C' + 2p[x'_0(x_0 - e_x) + y'_0(y_0 - e_y)]$$

$$k_3 = p[x''_0(x_0 - e_x) + y''_0(y_0 - e_y)] -$$
$$2p(a')^2[e_x(x_0 - R_y) + e_y(y_0 - R_x) + r_0^2/2]$$

$$k_4 = 2p(y'_0 + e_x a')$$

$$k_5 = p[y''_0 + e_x a'' + e_y (a')^2]$$

$$k_6 = -2p(x'_0 - e_y a')$$

$$k_7 = -p[x''_0 - e_y a'' + e_x (a')^2]$$

$$R_x = \frac{1}{2J_x} \cdot \iint_F y\left(x^2 + y^2\right) dF$$

$$R_y = \frac{1}{2J_y} \cdot \iint_F x\left(x^2 + y^2\right) dF$$

$$r_0^{\ 2} = x_0^{\ 2} + y_0^2 + (J_x + J_y)/F$$

u,v, j - перемещения центра тяжести сечения Z вдоль его главных центральных осей X,Y и угол закручивания вокруг оси центров изгиба; x_0, y_0 - координаты следа оси центра изгиба в сечении; e_x, e_y - след линии нагружения (*PP*) в сечении; $C = GJ_{кр}$ - жёсткость данного сечения на свободное кручение ($C = \frac{1}{3} G \cdot \Sigma b_k t_k^3$ - если сечение состоит из прямоугольников; по рекомендации [2] эта величина в наших расчётах увеличивалась на 10%). Естественная (конструктивная) закрученность ненагруженного стержня учтена углом закручивания $\alpha(z)$ в коэффициентах $k_3 - k_7$ (4). Так как прямая нагружения (*P-P*) неподвижна в пространстве, координаты e_x, e_y следа линии нагружения в каждом сечении зависят от положения центра тяжести и угла $\alpha = \alpha(z)$; они должны преобразовываться в коэффициентах уравнений (1)- (3) по формулам:

$$e_{x_*} = e_y \sin\alpha + e_x \cos\alpha,$$

$$e_{y_*} = e_y \cos\alpha - e_x \sin\alpha. \qquad (5)$$

Зависимость изгибных жесткостей EJ_x и EJ_y от угла $\alpha(z)$ для конструктивно сильно закрученных стержней также должна учитываться [3].

Уравнения (1)-(3) выведены по схеме вывода уравнений С.П. Тимошенко [4]. При их выводе учитывалась зависимость всех величин, кроме *P,E,G,* от продольной координаты *Z*. Кроме того, для естественно закрученных стержней учитывалась зависимость координат *X,Y* от угла $\alpha(z)$ при переходе от одного сечения к другому, бесконечно близкому. С использованием формул типа (5) получаем:

$$x'_z \approx y \cdot a'_z;\ y'_z \approx -x \cdot a'_z;$$

$$x''(z) \approx -x \cdot (a')^2 + y \cdot a'';$$

$$y''(z) \approx -x \cdot a'' - y \cdot (a')^2$$

Для тонкостенных стержней постоянного сечения уравнения (1)-(3) переходят в уравнения В.З. Власова[5] и С.П. Тимошенко [4].

Для стержня на рис.1 определялась критическая нагрузка $\sigma_{кр}$ при продольном центральном сжатии (σ - равномерное сжимающее напряжение на торце). Уравнения (1)-(3) решались методом конечных разностей при различных условиях закрепления стержня. Для тестирования уравнений (1)-(3) задача решалась также методом конечных элементов (вычисления выполнил сотрудник КГАСА Абдюшев А.А.). Результаты вычислений оказались несколько неожиданными:

для условий закрепления “свободный конец + заделка” и “шарнир + шарнир” результаты совпали; при закреплении “шарнир + заделка” МКЭ дал завышение критической нагрузки на 5%; при закреплении “заделка + заделка” расхождение оказалось более значительным. Для выяснения причин несовпадения результатов в случае жёсткой заделки на обоих торцах задача была решена третьим независимым методом.

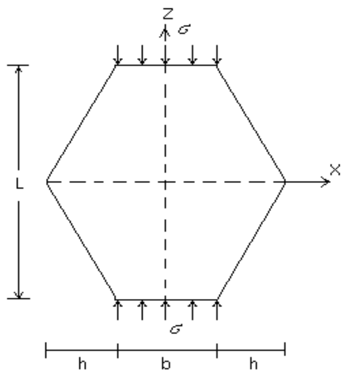

Рис.2. Сжатие пластины с наклонными кромками

Таблица. Напряжения в центральной пластине (правая верхняя четверть). P=1000 кгс; t = 1 см.

Напряжения S_z

-166,66	-166,67	-166,67	-167,92
-125,51	-125,44	-125,24	-124,91
-100,39	-100,36	-100,26	-100,10
-83,66	-83,64	-83,59	-83,49
-71,84	-71,82	-71,76	-71,66
-63,98	-63,93	-63,77	-63,50

Напряжения τ_{zx}

0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	+2,07	+4,15	+6,24
0,0	+1,31	+2,61	+3,91
0,0	+0,89	+1,78	+2,67
0,0	+0,62	+1,23	+1,86
0,0	0,0	0,0	0,0

Напряжения s_x

-1,93	-1,77	-1,29	-0,48
-0,01	-0,04	-0,13	-0,29
-0,00	-0,02	-0,07	-0,15
+0,01	-0,00	-0,03	-0,08
+0,08	+0,07	+0,05	+0,01
-2,13	-2,17	-2,26	-2,41

При сжатии прямоугольной пластины с боковыми треугольными пластинами (рис.2) её напряжённо-деформированное состояние описывается уравнениями плоской задачи теории упругости и определено в работе [6]. При этом напряжения $\sigma_z, \sigma_x, \tau_{zx}$ распределяются по поперечным сечениям срединной поверхности пластины неравномерно (таблица).

Полученное поле напряжений можно использовать для решения задачи об устойчивости стержня на рис.1. Напряжения σ_x и τ_{zx} для центральной пластины на рис.2 составляют около 4-6% от напряжений σ_z, а для центральной пластины стержня на рис.1 ещё меньше, т.к. после отгибания боковых пластин центральная пластина становится более свободной для деформаций в поперечном направлении. Далее напряжения и не учитываем. С учётом переменности уравнение устойчивости сжимаемой пластины имеет вид [7]:

$$D\cdot\left(\frac{\partial^4 v}{\partial z^4}+2\cdot\frac{\partial^4 v}{\partial z^2\partial x^2}+\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}\right)+$$
$$+t\cdot\left(\sigma_z\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0 \qquad (6)$$

где D – цилиндрическая жёсткость пластины; t – толщина пластины.

Граничные условия для жёсткой заделки на горизонтальных кромках центральной пластины (рис.1): $v=0$ и $\dfrac{\partial v}{\partial z}=0$. (7)

Условия взаимодействия центральной пластины и ребра переменной жёсткости на длинных кромках центральной пластины (рис.1) с учётом малости крутильной жёсткости ребра :

$$M_x \approx 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[EJ_x^{(p)}(z)\cdot\frac{\partial^2 v_p}{\partial z^2}\right]=$$
$$=-D\cdot\left[\frac{\partial^3 v_{пл}}{\partial x^3}+(2-\mu)\cdot\frac{\partial^3 v_{пл}}{\partial z^2\partial x}\right], \qquad (8)$$

где: $v_p = v_{пл} = v$; $J_x^{(p)}(z)$ - момент инерции сечения ребра относительно его главной центральной оси. Задача (6)-(8) для прямоугольной центральной пластины (рис.1) также решалась методом конечных разностей.

Напряжения $\sigma_z(z,x)$, найденные для единичной нагрузки *P* из уравнений теории упругости, увеличивались пропорционально сжимающему напряжению $\sigma = P/F$ на торце и вводились в уравнение (6). Все вычисления производились при следующих числовых данных: L =160 см, b = 6 см, h = 5 см, t = 0.5 см, E = $2.1\cdot10^6$ кгс/см.кв., G = $8.1\cdot10^5$ кгс/см.кв.

Выяснилось, что при решении задачи (6)-(8) для определения критической нагрузки требуется сетка с числом делений в продольном направлении $N_z > 2000$ и в поперечном $N_x \approx 200$. Даже при столь мелкой сетке удаётся определить лишь третью по величине критическую нагрузку $\sigma_{кр} \approx 3200$ кгс/см.кв. Аналогичные трудности возникают, видимо, и при решении задачи методом конечных элементов. Эта проблема известна, но универсальных методов её решения не существует. В данном случае удаётся решить задачу методом малого параметра изложим это решение схематично.

Перейдём в уравнении (6) с нагрузкой *q* в правой части к безразмерным величинам с учётом того, что величина *q* может быть сколь угодно малой:

$$\delta^2 = t/b;\ \tilde{q}=\frac{q(1-\mu^2)}{E/12};$$

$$\tilde{\sigma}_z=\frac{\sigma_z(1-\mu^2)}{E/12};\ v=b\cdot w;\ z=b\cdot\tilde{z};\ x=b\cdot\tilde{x}.$$

Положим $\tilde{\sigma}_z=\tilde{\tilde{\sigma}}_z\cdot\delta^2$; $\tilde{q}=q_*\cdot\delta^4$; при $\delta\to0$ из (6) получаем уравнение:

$$\tilde{\tilde{\sigma}}_{\tilde{z}}\cdot\frac{\partial^2 w_0}{\partial\tilde{z}^2}+\frac{\partial\tilde{\tilde{\sigma}}_{\tilde{z}}}{\partial\tilde{z}}\cdot\frac{\partial w_0}{\partial\tilde{z}}=q_*. \qquad (9)$$

Функция w_0 даёт фоновое решение, связанное с нагрузкой *q*, и является функцией, медленно изменяющейся вдоль координаты $\tilde{z}$, что можно подтвердить непосредственным решением уравнения (9). Поскольку величина *q* считается малой и формы потери устойчивости наслаиваются на фоновые прогибы, полным решением уравнения (9) заниматься не будем. Представим перемещение w как сумму медленной и быстрой функций и растянем координату $\tilde{z}$:

$$w = w_0 + \tilde{w} \cdot \delta^2 \,;\; \tilde{z} = \tilde{\tilde{z}} \cdot \delta . \qquad (10)$$

Примечание: здесь нет необходимости переносить начало отсчёта координаты $\tilde{\tilde{z}}$ на край, как в методе Люстерника-Вишика, так как быстрые решения в случае пластины не содержат затухающих составляющих. Далее производными от медленных функций по растянутой координате $\tilde{\tilde{z}}$ пренебрегаем. Представим функцию $\tilde{w}$ как $\tilde{w} = \tilde{\tilde{w}}(\tilde{\tilde{z}}) \cdot f(\tilde{x})$, все функции одного порядка d^0. Функцию $f(\tilde{x})$ не обязательно считать медленной: аналогично сказанному выше, можно построить асимптотику для быстрых функций в поперечном направлении, но здесь нас больше интересует поведение пластины как длинного стержня. В поперечном направлении (X) НДС близко к однородному и $\sigma_z(z,x) \approx \sigma_z(z)$.

Уравнение (6) с учётом (9) для членов при d^2 приводит к уравнению:

$$\frac{d^4\tilde{\tilde{w}}}{d\tilde{\tilde{z}}^4} + \tilde{\tilde{\sigma}}_{\tilde{\tilde{z}}} \cdot \frac{d^2\tilde{\tilde{w}}}{d\tilde{\tilde{z}}^2} = 0 . \qquad (11)$$

В размерных величинах уравнение (11) имеет вид:

$$\frac{Et^3(z)}{12(1-\mu^2)} \cdot \frac{d^4v}{dz^4} + t(z) \cdot \sigma_z(z) \cdot \frac{d^2v}{dz^2} = 0 . \qquad (12)$$

Пусть P - сжимающая сила на торце и в (12) $\sigma_z(z) = P/F(z)$. Для эквивалентной пластины или стержня переменного сечения площадь сечения $F(z) = b(z) \cdot t(z)$; тогда в (12)

$$\frac{Et^2(z)}{12(1-\mu^2)} \cdot F(z) = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \frac{b(z) \cdot t^3(z)}{12} = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot J_x(z),$$

где $J_x(z)$ - момент инерции эквивалентного сечения и теперь ось X – главная центральная ось каждого сечения. Напомним, что в теории В.З. Власова из соображений недеформируемости контура сечения принято $\mu = 0$, хотя многие считают это равенство излишним.

Вместо уравнения (12) теперь получаем:

$$EJ_x(z) \cdot \frac{d^4v}{dz^4} + P \cdot \frac{d^2v}{dz^2} = 0 , \qquad (13)$$

где для согласования обозначений уравнения (13) с обозначениями уравнения (3) будем считать, что $EJ_x(z) < EJ_y(z)$.

Уравнение (13) при большом подъёме треугольника боковых пластин нуждается в уточнении. Считая $J_x(z)$ медленной функцией и пренебрегая производными от неё по растянутой координате (переход к растянутой координате не приводим ввиду очевидности), запишем (13) в классическом виде [6]:

$$[(EJ_x(z) \cdot v'')]'' + (p \cdot v')' = 0.$$

Интегрируя это уравнение дважды, получаем:

$$EJ_x(z) \cdot v''(z) + p \cdot v(z) = C_1 \cdot z + C_2 . \qquad (14)$$

Уравнение (14) легко решается методом конечных разностей, если константы C_1 и C_2 включить в число неизвестных величин и записать уравнение (14) не только внутри области интегрирования, но и на опорах. Наличие двух дополнительных констант при этом позволяет выполнить все четыре граничных условия:

$$v = 0 \quad и \quad v' = 0 \quad при \quad z = \mp L/2.$$

Первые три критические нагрузки, определённые методом конечных разностей из уравнения (14) по критерию $det \approx 0$, совпали с аналогичными решениями системы (1)-(3) (кгс/см.[2].):

$$s^{I}_{кр} = 1153 \,;\, s^{II}_{кр} = 1721; \;\; s^{III}_{кр} = 3412,$$

но для решения системы (1)-(3) требуется значительно большее число разбиений N_z , чем при решении уравнения (14).

При решении уравнений (6) и (13) для получения первых двух критических нагрузок число разбиений должно быть в десятки раз больше, N_z чем = 1000. Это обстоятельство для стержней с неоднородным докритическим НДС надо учитывать, и оно может вызывать большие затруднения в расчётах прямыми численными методами. При решении задачи с помощью уравнений (1)-(3) численной проблемы краевого эффекта не возникало по крайней мере, вплоть до числа делений стержня N_z = 1000 (большего количества делений не понадобилось).

Проведённые нами эксперименты [8] полностью подтвердили полученные теоретические результаты. Уравнения (1)-(3) позволили правильно предсказать величины критических нагрузок, а в расчётах на прочность по предельному состоянию определить нагрузки, при которых в окрестности заделки в негибком стержне образуется пластический шарнир. Данная работа подтверждает, что решение задачи устойчивости тонкостенных стержней переменного сечения с помощью уравнений (1)-(3) многократно проще, чем её решение на основе двумерной модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Патент на изобретение № 2236524. Решетчатая конструкция. / И.Л.Кузнецов, А.У. Богданович. Заявл. 01.04.04; Опубл. 20.09.04; Бюллетень №26.
2. Бояршинов С.В. Основы строительной механики машин. М.: Машиностроение, 1973. – 454 с.
3. Богданович А.У., Кузнецов И.Л., Абдюшев А.А. О продольно сжатых тонкостенных стержнях непрерывно-переменного сечения и естественно закрученных стержнях. // Изв. вузов. Строительство. - 2003, № 5. - С. 10–17.
4. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М.: Наука, 1971. – 800 с.
5. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. М.: Наука, 1959. - 568 с.
6. Богданович А.У. Особенности деформирования тонкостенных стержней переменного сечения при продольном сжатии (ч. II). // Сб. науч. трудов докторантов и аспирантов. Казань: КГАСА, 2004. – С. 280-286.
7. Вольмир А.С., Кильдибеков И.Г. Устойчивость пластин в пределах упругости. // В справочнике “Прочность. Устойчивость. Колебания.” М.: Машиностроение, 1968, Т.3. - С.91; Т.1. - С. 531.
8. Богданович А.У. Продольное сжатие тонкостенного стержня переменного сечения. // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского, Казань: Изд-во КГУ, т.28, 2004. - С. 44-46.