УДК 517.968 : 519.6

А.И. Леонов

ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Обозначим через $m < p$ и $C = C[-1,1]$ пространства функций, квадратично–суммируемых по Лебегу и, соответственно, непрерывных на отрезке $[-1,1]$, а через $W_2^{(m)}$ – пространство Соболева функций, имеющих обобщенную производную порядка $m\,(m \in N)$, принадлежащую пространству L_2. В пространстве Соболева $W_2^{(m)}$ через $W^r H_2^a$ и $W^r H^a$ $(r \geq m, 0 < a \leq 1)$ будем, как обычно, обозначать классы функций, имеющих производную порядка r, удовлетворяющую условию Гельдера с показателем a в метрике пространства L_2 и C, соответственно.

Рассмотрим линейную краевую задачу

$$R_n(x) = 0, \quad n = \overline{1,m}, \tag{1}$$

для интегро-дифференциального уравнения

$$Kx \equiv x^{(m)}(t) + \sum_{k=1}^{m} g_k(t) x^{(m-k)}(t) +$$

$$\sum_{j=0}^{p} \int_{-1}^{+1} h_j(t,s) x^{(j)}(s) ds = y(t), \quad -1 \leq t \leq +1, \tag{2}$$

где m и p – целые неотрицательные числа, причем $m < p, R_n$ – данные линейно-независимые функционалы на пространстве $(m-1)$-раз непрерывно-дифференцируемых на [-1,1] функций, $g_k(t), h_j(t,s)$ и $y(t)$ – известные функции, а $x(t)$ – искомая функция.

Известно (см., напр., в [1]), что при естественном выборе пространства искомых элементов и пространства правых частей уравнения (2) задача (1)–(2) при $m < p$ является, вообще говоря, некорректно поставленной. В работе [2] нами для решения задачи (1) - (2) был предложен вариант метода осциллирующих функций, когда функции h_j (по переменной t), g_k и y обладали определенной степенью гладкости. В работе [3] для указанной задачи дано обоснование метода коллокации и одного варианта метода механических квадратур в случае, когда функции h_j (по переменной s) обладают определенной степенью гладкости, а гладкости известных функций по переменной t нет.

Данная работа является естественным продолжением работы [3]. В ней предлагается теоретическое обоснование общего полиномиального проекционного метода решения задачи (1) - (2) в паре пространств $W_2^{(m)}, L_2$.

Пусть Y есть пространство L_2 с обычной евклидовой нормой $\|.\|_2$, а X – подпространство пространства $W_2^{(m)}$ функций, имеющих суммируемую по Лебегу производную порядка p и удовлетворяющих краевым условиям (1). Норму в X зададим соотношением $\|x\| = \|x^{(m)}\|_2$ $(x \in X)$. В отличие от Y, пространство X является неполным пространством. Задачу (1)–(2) запишем в виде одного операторного уравнения

$$Kx \equiv Gx + T_1 x + T_2 x = y \quad (x \in X, y \in Y), \tag{3}$$

где операторы G, T_1, T_2 определяются соотношениями:

$$(Gx)(t) = x^{(m)}(t),\ (T_1 x)(t) = \sum_{k=1}^{m} g_k(t)\, x^{(m-k)}(t) +$$

$$\sum_{j=0}^{m} \int_{-1}^{+1} h_j(t,s) x^{(j)}(s)\, ds,$$

$$(T_2 x)(t) = \sum_{j=m+1}^{p} \int_{-1}^{+1} h_j(t,s) x^{(j)}(s)\, ds.$$

Обозначим через H_n множество алгебраических многочленов степени не выше n, а через $X_n \subset X$ и $Y_n \subset Y$ – подпространства многочленов $\overset{0}{H}_{n+m-1} = H_{n+m-1} \cap X$ и H_{n-1} соответственно. Введем в рассмотрение аддитивный и однородный оператор P_n, который любую функцию из Y переводит в многочлен из Y_n.

Приближенное решение уравнения (3) будем искать как точное решение следующего конечномерного уравнения

$$P_n K x_n \equiv P_n G x_n + P_n T_1 x_n + P_n T_2 x_n =$$

$$= P_n y \quad (x_n \in X_n, P_n y \in Y_n). \tag{4}$$

Как хорошо известно, (4) есть уравнение общего полиномиального проекционного метода решения уравнения (3), а следовательно, и решения краевой задачи (1) - (2). Оно эквивалентно системе линейных алгебраических уравнений порядка $n+m$ относительно коэффициентов многочлена $x_n(t)$.

Для общего полиномиального проекционного метода (4) справедливы следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*:

1) $g_k, k=\overline{1,m}$, и $y \in L_2$;

2) функции $h_j(t,s)$, $j=\overline{0,m}$, таковы, что оператор $T_1 : X \to Y$ вполне непрерывен;

3) при $j=\overline{m+1,p}$ существуют непрерывные частные производные $\dfrac{\partial^{j-m}}{\partial s^{j-m}} h_j(t,s)$, причем $\dfrac{\partial^k}{\partial s^k} h_j(t,\pm 1) \equiv 0, k=\overline{0, j-m-1}$;

4) краевая задача (2) для однородного уравнения, соответствующего уравнению (1), имеет лишь тривиальное решение;

5) операторы $P_n : Y \to Y$ обладают свойством: $P_n^2 = P_n$, $\| P_n \| = O(1), n \to \infty$.

Тогда уравнение (4) однозначно разрешимо (хотя бы при всех достаточно больших n). Приближенные решения $x_n \in X_n$ сходятся к точному решению $x \in X$ уравнения (3) в метрике пространства $W_2^{(m)}$ со скоростью

$$\| x - x_n \| = O(E_{n-1}(x^{(m)})_2), \tag{5}$$

где $E_{n-1}(z)_2$ есть наилучшее среднеквадратическое приближение функции $z(t)$ алгебраическими многочленами степени не выше $n-1$.

Следствие. Пусть, в условиях теоремы 1, коэффициенты уравнения (2) таковы, что решение $x(t) \in W^r H_2^a, r \ge m, 0 < a \le 1$. Тогда для погрешности приближенных решений верна порядковая оценка

$$\| x - x_n \| = O(n^{-r+m-a}). \tag{6}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены*:

1) $g_k, k=\overline{1,m}$, и $y \in C$;

2) операторы $P_n : Y \to Y$ $(P_n^2 = P_n)$ неограничены при каждом фиксированном n, а $P_n : C \to Y$ обладает свойством: $\| P_n \|_{C \to Y} = O(1), n \to \infty$;

3) условия 2) – 4) теоремы 1.

Тогда уравнение (4) при всех n, начиная с некоторого, имеет единственное решение $x_n \in X_n$. Погрешность приближенных решений в метрике пространства $W_2^{(m)}$ характеризуется порядковым соотношением

$$\| x - x_n \| = O(E_{n-1}(x^{(m)})), \tag{7}$$

где $E_{n-1}(z)$ есть наилучшее равномерное приближение функции $z(t)$ алгебраическими многочленами степени не выше $n-1$.

Следствие. Пусть в условиях теоремы исходные коэффициенты таковы, что решение $x(t) \in W^r H^a$, $r \ge m, 0 < a \le 1$. Тогда для погрешности приближенных решений верна порядковая оценка (6).

Теорема 3. В условиях теорем 1 и 2 общий полиномиальный проекционный метод (4) устойчив относительно малых возмущений коэффициентов уравнения (3), а следовательно, и исходных данных краевой задачи (1)–(2).

Доказательство теорем. В условиях теорем 1 и 2 оператор $T_2 = T_3$, где T_3 задается соотношением:

$$(T_3 x)(t) = \sum_{j=m+1}^{p} (-1)^{j-m} \int_{-1}^{+1} \frac{\partial^{j-m}}{\partial s^{j-m}} h_j(t,s) x^{(m)}(s)\, ds.$$

Поэтому в условиях указанных теорем оператор $T_1 + T_2 : X \to Y$ вполне непрерывен и, следовательно, уравнение (3) является уравнением, приводящимся к уравнению второго рода с вполне непрерывным оператором. Это означает, что условие 4) теоремы 1 эквивалентно однозначной разрешимости краевой задачи (1)–(2), а следовательно, эквивалентно условию двусторонней обратимости оператора $K : X \to Y$ уравнения (3).

Далее, в условиях теоремы 1 имеем

$$d_n \equiv \| y - P_n y \| \le 2 \| P_n \|_{Y \to Y} E_{n-1}(y)_2 = \\ = O(E_{n-1}(y)_2) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{8}$$

Поэтому для любого элемента $x_n \in X_n$ имеем

$$\| K x_n - K_n x_n \| = \| (T_1 + T_2) x_n - P_n (T_1 + T_2) x_n \| \le \\ \le \sup_{z \in X, \| z \| \le 1} \| (T_1 + T_2) z - P_n (T_1 + T_2) z \|$$

$$\| x_n \|_X \equiv e_n \| x_n \|_X . \tag{9}$$

Из соотношения (8) и теоремы Гельфанда о сходимости по норме на компакте сильно сходящейся последовательности операторов (см., например, в [5], с. 322) вытекает сходимость к нулю при $n \to \infty$

величины e_n, что, в свою очередь, влечет сильную сходимость последовательности операторов K_n к оператору K на подпространстве X_n. Остальное непосредственно следует из общей теории приближенных методов функционального анализа (см., например, в [4]). При доказательстве же теоремы 2 величину d_n в (8) можно оценить следующим образом:

$$d_n \equiv \| y - P_n y \| \leq 2 \| P_n \|_{C \to Y} E_{n-1}(y) =$$
$$= O(E_{n-1}(y)) \to 0, \quad n \to \infty,$$

что влечет сильную сходимость последовательности операторов $P_n : C \to Y$ к оператору вложения пространства C в пространство Y.

Поскольку в условиях теорем 1 и 2 операторы $K_n : X_n \to Y_n$ обратимы (хотя бы для всех достаточно больших n) и обратные операторы $K_n^{-1} : Y_n \to X_n$ ограничены по норме в совокупности, то отсюда нетрудно вывести утверждение теоремы 3 (см. гл. 1 монографии [4]).

В заключение приведем несколько замечаний.

1. В условиях теорем 1 и 2 приближенные решения сходятся к точному решению равномерно. Более того, равномерно сходятся и все производные приближенного решения до $(m-1)$-го порядка включительно к соответствующим производным точного решения.

2. Поскольку точное решение краевой задачи имеет суммируемую по Лебегу производную порядка $p > m$, то можно указать определенный порядок сходимости наилучших приближений производной $x^{(m)}(t)$ точного решения многочленами из H_{n-1}. Поэтому порядковые оценки (5) и (7) могут быть уточнены.

3. В рассмотренный класс краевых задач (1)–(2) входят также и краевые задачи для интегро-дифференциального уравнения (2), имеющего в интегральной части и слабо сингулярные особенности.

4. Приведенные теоремы дают непосредственное обоснование конкретных полиномиальных методов решения краевой задачи (1)–(2), таких, как, например, метод Галеркина, методы коллокации и подобластей по узлам Чебышева I –рода.

5. В случае $p = m + 1$ можно снять ограничение на функцию $h_p : h_p(t, \pm 1) = 0$. Это означает, что обоснование общего полиномиального метода может быть проведено и в более общей ситуации, когда задача (1)–(2) в выбранной нами паре пространств не является корректно поставленной.

Литература

1. Габдулхаев Б.Г. Некоторые вопросы теории приближенных методов, II// Изв. вузов. Математика. – 1968, № 10. – С. 21 – 29.
2. Агачев Ю.Р., Леонов А.И. Об одном оптимальном методе решения обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений/ Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Том 5. Актуальные проблемы математики и механики. Материалы Международной научной конференции. – Казань: Изд-во “Унипресс”, 2000. – С. 12 – 13.
3. Агачев Ю.Р., Леонов А.И. О сходимости метода коллокации и одного варианта метода механических квадратур для интегро-дифференциальных уравнений/ Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Том 11. Проблемы современной математики. Материалы научной конференции. – Казань: Изд-во “Унипресс”, 2001. – С. 7 – 9.
4. Габдулхаев Б.Г. Оптимальные методы решения линейных задач. – Казань: Изд-во КГУ, 1980. – 232 с.
5. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. Изд. второе. – М.: Наука, 1977. – 744 с.