



УДК 539.3

Р.А.Каюмов, С.В. Гусев

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОЧНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОЯ ОРГАНОПЛАСТИКА НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА РАБОТЫ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, ОБРАЗОВАННЫХ НАМОТКОЙ

В задачах определения механических характеристик композитных материалов (КМ) встречаются определенные трудности. Это, в первую очередь, большой разброс экспериментальных данных, который связан с трудностью в определении момента разрушения. Во-вторых, задачи идентификации относятся к классу обратных задач, которые являются некорректными, успешность решения которых зависит от удачного выбора способа регуляризации. В третьих, немалую роль играет неточность модели, поскольку можно с разрушением конструкции связывать различный уровень структурного разрушения КМ (разрушение матрицы или волокна). К сопутствующим факторам относятся погрешности приборов, неточности от формы конструкции и так далее. Кроме того, механические характеристики КМ зависят от конструктивных особенностей изделия, поскольку процесс усадки при отвердевании связующего происходит по-разному в различных направлениях в соответствии с геометрическими ограничениями конструкции.

Постановка исследуемой задачи состоит в следующем. Рассматривается конструкция, изготовленная намоткой или наложением слоев из КМ. Для каждого слоя в квадранте  $i$  плоскости  $S_1, S_2$  в осях ортотропии известен вид предельной поверхности:

$$f(s) = U f_i(s), \quad f_i(s) = s^T A_i s = 1, \quad (1)$$

где  $s = (s_{11}, s_{22}, s_{12})$ , значком “ $T$ ” обозначена операция транспонирования, ось 1 направлена вдоль армирования,  $U$  - знак объединения,  $A$  - матрица пластических характеристик,  $i$  - номер квадранта плоскости ( $S_{11}, S_{22}$ ).

Считаются известными экспериментальные значения параметров предельных нагрузок  $T^{\text{эксп}}$ , при которых оболочка разрушается вследствие развития пластических деформаций под действием однопараметрических нагрузок:

$$Q^N = q_{0N} T^{\text{эксп}}, \quad T^{\text{эксп}} = (T_1, \dots, T_N), \quad (2)$$

где  $T^{\text{эксп}}$  - вектор параметров разрушающей нагрузки,  $N$  - количество экспериментов, вектор  $q_{0N}$  включает поверхностные и объемные нагрузки.

Система нелинейных уравнений для получения численных значений  $T^{\text{числ}}$  представима в виде оператора  $H$ , который зависит от искомого вектора  $x$ , состоящего из пластических характеристик слоя  $A_{ij}$ :

$$H(x) = q_{0N} T^{\text{числ}}, \quad T^{\text{числ}} = (t_1, \dots, t_N), \quad x = (A_{11}, A_{22}, \dots). \quad (3)$$

Ставится задача определения  $A_{ij}$  пластических характеристик слоя КМ. При численной реализации система нелинейных уравнений может вообще не иметь решений или быть неустойчивой по отношению к возмущению исходных данных. Такую задачу можно решить приближенно, считая, что критерием, в соответствии с которым необходимо отыскивать решение, является минимум невязки  $\Phi$  вектора разности расчетных и экспериментальных результатов. То есть, за решение принимается вектор  $x$  пластических характеристик слоя, которому соответствует минимальная евклидова норма невязки:

$$\min \Phi = d^2(q_{0N} T^{\text{числ}}),$$

$$d^2(q_{0N} T^{\text{числ}}) = (H(x) - q_{0N} T^{\text{эксп}})^T (V_{ii}) (H(x) - q_{0N} T^{\text{эксп}}), \quad (4)$$

где  $(V_{ii})$  - диагональная матрица размером  $N \times N$  весовых.

В работах многих авторов [1,2] показано, что хрупкие слои в составе пакета ведут себя как пластические. Таким образом, в дальнейшем не будем делать различий между прочностными и пластическими характеристиками. Несущая способность оболочки оценивается на основе статической и кинематической теорем, путем отыскания  $t_-$  и  $t_+$  - нижней и верхней границ коэффициента предельной нагрузки  $t_*$ , при которой оболочка разрушается вследствие развития пластических деформаций.

Рассмотрим задачу определения прочностных характеристик ленты, из которой путем намотки под углом  $\pm j$  к образующей изготовлены цилиндрические оболочки. В работе [3] приведены 14 средних экспериментальных значений предельных напряжений органопластика с коэффициентами армирования, равными  $0.6 \pm 0.05$  (таблица 1). Серии образцов с углами намотки от  $25^\circ$  до  $70^\circ$  были подвергнуты растяжению (3 серии экспериментов), сжатию (5 серий) и внутреннему давлению (6 серий).

В систему уравнений, описывающую математическую модель поведения и представимую оператором  $H(x)$  (2), входят уравнения равновесия в осях оболочки. Запишем их в напряжениях:

$$\sigma_{xx} h = (P_o t) / (2\pi R), \quad \sigma_{yy} h = (q_o t R), \quad \text{или}$$

$$S_{xx}^{\text{числ.}} = \sigma'_{xx} t, \quad S_{yy}^{\text{числ.}} = \sigma'_{yy} t, \quad (5)$$

$$\text{где } \sigma'_{xx} = P_o / (2\pi R h), \quad \sigma'_{yy} = (q_o R) / h.$$



Таблица

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
φ	35	45	55	25	35	45	55	65	25	35	45	55	65	70
$S_{xx}^{эксп.}$	276	96	39	-72	-67	-54	-38	-33	0	0	0	0	0	0
$S_{yy}^{эксп.}$	0	0	0	0	0	0	0	0	80	152	210	440	870	1040

В физических соотношениях, записанных в осях ленты:  $\{s_{ij}\} = E\{e_{ij}\}$ , принимается  $E = A^{-1}/s_s$ , где  $s_s$  - постоянная размерности напряжения [4]. Поскольку в оболочке состояние безмоментное и осесимметричное, то  $\epsilon_{xy}=0$ . При переходе к осям оболочки для связи между векторами используется матрица преобразования S:

$$S = \begin{bmatrix} \cos^2 j & \sin^2 j & -\sin 2j \\ \sin^2 j & \cos^2 j & \sin 2j \\ \sin 2j / 2 & -\sin 2j / 2 & \cos 2j \end{bmatrix},$$

$$\{s_{xy}\} = [S]\{s_{ij}\}, \quad \{e_{xy}\} = [S]^T\{e_{ij}\}. \quad (6)$$

Напряжения  $\sigma$ , соответствующие полю скоростей деформаций  $\epsilon$ , определяются из условия пластичности и закона пластического течения:

$$s = A^{-1}e / \sqrt{(e)^T A^{-1}(e)}, \quad A = A(\text{sign}(s)), \quad (7)$$

то есть матрица A выбирается с учетом того, в каком квадранте находится вектор  $(\sigma_{11}, \sigma_{22})$ .

Если определен параметр разрушения  $t_*$ , то считаются определенными разрушающие нагрузки  $P_0, q_0$  или разрушающие напряжения  $S_{xx}^{числ.}, S_{yy}^{числ.}$ .

Из (1) следует:

$$t_* = 1 / \sqrt{[(s)^T A_i(s)]}. \quad (8)$$

В качестве критерия прочности (1) принят модифицированный критерий Норриса-Мак-Кинена [5], который описывает уравнение предельной поверхности следующим образом:

$$\left[ (s_{11}/[s_{11}^*])^2 + (s_{22}/[s_{22}^*])^2 + (s_{12}/[s_{12}^\pm])^2 \right] = 1, \quad (9)$$

где  $[s_{11}^*], [s_{22}^*]$  - пределы прочности при растяжении или сжатии. Вместо верхнего символа "\*" в зависимости от номера квадранта нужно ставить символ "+" или "-". Будем отыскивать вектор, составленный из пределов прочности, которые связаны с пластическими характеристиками ленты следующим образом:

$$x_1 = [s_{11}^+]^2 = 1/A_{11}^+, \quad x_2 = [s_{11}^-]^2 = 1/A_{11}^-,$$

$$x_3 = [s_{22}^+]^2 = 1/A_{22}^+, \quad x_4 = [s_{22}^-]^2 = 1/A_{22}^-, \quad x_5 = A_{33}^- = 1/[s_{12}^\pm]^2. \quad (10)$$

На вектор решения задачи (4)-(7) накладываются ограничения, связанные с пределом прочности связующего и волокон, из которых состоит лента.

$$[s_i]_{\min} \leq [s_i] \leq [s_i]_{\max}, \quad i=1, \dots, 5. \quad (11)$$

Экспериментальные и расчетные значения напряжений

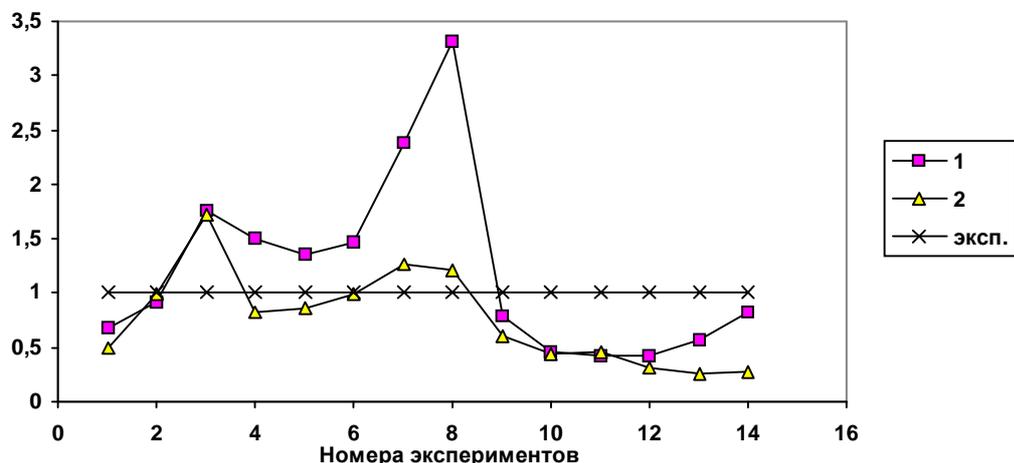


Рис. 1



С учетом (5) представим минимизируемую функцию (4), зависящую от напряжений, причем каждое слагаемое запишем в безразмерном виде.

$$d^2(x) = \sum_{i=1}^N (V_{ii})(s_i^{числ} - s_i^{эксп})^2, \quad V_{ii} = 1/(s_i^{эксп})^2. \quad (12)$$

Сведем задачу минимизации  $\Phi$  (4) при ограничениях (11) к задаче на безусловный экстремум путем замены переменных:

$$S_i = (s_{i\min}) \text{SIN}^2(X_i) + (s_{i\max}) \text{COS}^2(X_i), \quad i=1, \dots, 5, \quad (13)$$

Для каждой компоненты интервалы поиска пластических характеристик задаются, исходя из априорной информации. Например, для композитных материалов типа органопластика, как правило, предел прочности вдоль волокон на растяжение много выше, чем на сжатие, в среднем в 4-6 раз, то есть  $[S_{11}^+] \gg 4-6[S_{11}^-]$ , и превышает прочность на растяжение волокон в поперечном направлении в 5-10 раз, то есть  $[S_{11}^+] = 5-10[S_{22}^-]$ . В свою очередь,  $[S_{22}^-] = 12-25[S_{22}^+]$ . Если связать границы поиска с пределами прочности компонент ленты, то очевидно, что прочность органопластика вдоль армирования не может превышать прочности волокна при растяжении  $[S_{11}^+]_{\max} \leq 3.5 \text{ ГПа}$  [6], прочность на сжатие поперек и вдоль армирования, скорее всего, будет не меньше прочности матрицы на сжатие  $[S_{11}^-]_{\min} \approx [S_{22}^-]_{\min} \geq 0.13-0.16 \text{ ГПа}$  [7], прочность на сдвиг  $[S_{12}^\pm]_{\min} \geq 0.044 \text{ ГПа}$  [7]. Тогда ограничения имеют вид:

$$0.9 \leq [S_{11}^+] \leq 3.5 \text{ ГПа}, \quad 0.13 \leq [S_{11}^-] \leq 0.5 \text{ ГПа},$$

$$0.06 \leq [S_{22}^+] \leq 0.2 \text{ ГПа}, \quad 0.13 \leq [S_{22}^-] \leq 0.2 \text{ ГПа},$$

$$0.044 \leq [S_{12}^\pm] \leq 0.2 \text{ ГПа}.$$

Применение для решения задачи минимизации метода Пауэла показало, что, если выбирать в качестве границ пределов прочности значения для связующего или волокна, то все значения искомым параметров в результате безусловной оптимизации выходят на границы интервалов поиска:  $[S_{11}^+] = 3.5 \text{ ГПа}$ ,  $[S_{11}^-] = 0.13 \text{ ГПа}$ ,  $[S_{22}^+] = 0.06 \text{ ГПа}$ ,  $[S_{22}^-] = 0.13 \text{ ГПа}$ ,  $[S_{12}^\pm] = 0.044 \text{ ГПа}$ . Приближение расчетных значений  $\sigma^{числ}$  к экспериментальным  $\sigma^{эксп}$  получается очень грубым. На рис. 1 для каждого эксперимента приведено их относительное отклонение  $(s_i^{числ} - s_i^{эксп})/s_i^{эксп}$  (кривая 1). Среднее отклонение по формуле (14)  $\delta_s = 58\%$ , квадратичная невязка  $\delta^2(x) = 9.85$ .

$$d_s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N ((s_i^{числ} - s_i^{эксп})/s_i^{эксп}) \cdot 100\%. \quad (14)$$

Выберем в качестве ожидаемых пределов прочности слоя КМ значения для аналогичного материала из справочника. Для органопластика Кевлар-49 [6]  $[S_{11}^+]^{ожид.} = 1.4 \text{ ГПа}$ ,  $[S_{11}^-]^{ожид.} = 0.235 \text{ ГПа}$ ,  $[S_{22}^+]^{ожид.} = 0.012 \text{ ГПа}$ ,  $[S_{22}^-]^{ожид.} = 0.53 \text{ ГПа}$ ,  $[S_{12}^\pm]^{ожид.} = 0.034 \text{ ГПа}$ . Для интервалов поиска  $0 \leq [S_{IJ}] \leq 2 \cdot [S_{IJ}]^{ожид.}$  получено:  $[S_{11}^-] = 0.062 \text{ ГПа}$ ,  $[S_{22}^-] = 0.021 \text{ ГПа}$ ,  $[S_{12}^\pm] = 0.048 \text{ ГПа}$ , остальные значения выходят на верхнюю границу интервала поиска, относительное отклонение расчетных напряжений от экспериментальных обозначено кривой 2 (рис. 1), при этом  $\delta^2(x) = 3.27$ ,  $\delta_s = 37.9\%$ .

Экспериментальные и расчетные значения напряжений

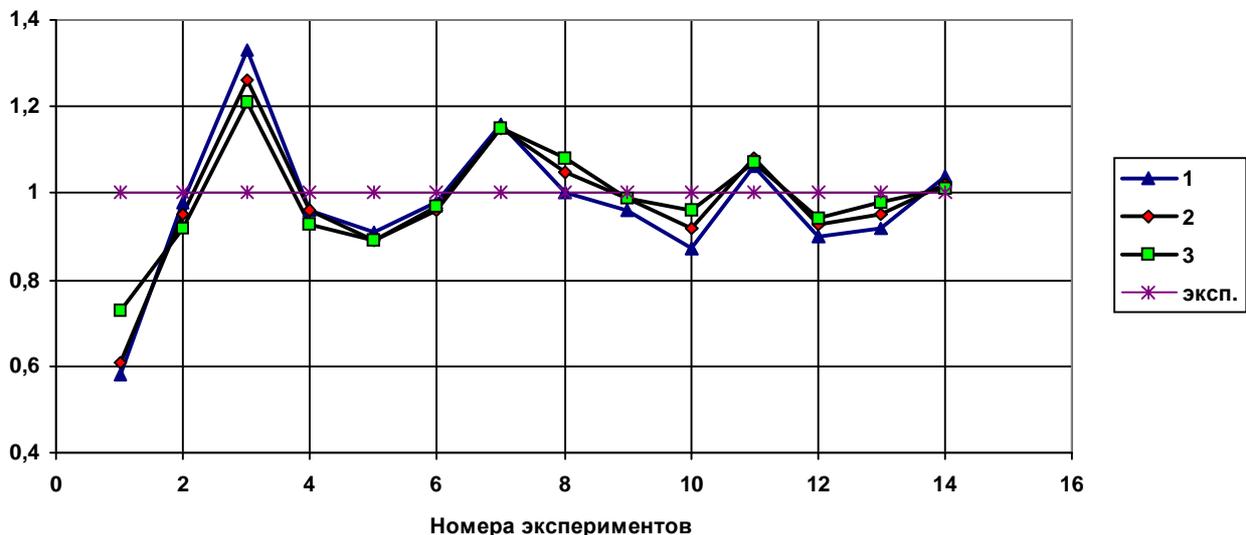


Рис. 2



Сделаем предположение, что влияние технологических факторов на прочностные характеристики зависит от угла намотки ленты. Представим зависимость расчетного угла намотки от табличного в виде кубической параболы:

$$\psi = \varphi(1 + a(1) + a(2) \cdot \varphi + a(3) \varphi^2), \quad (15)$$

где компоненты вектора **a** отвечают за величину изменения расчетного угла. Включим их в число отыскиваемых параметров. Новый вектор решения задачи минимизации (16), кроме пределов прочности ленты, содержит дополнительно 3 параметра, характеризующих технологический процесс изготовления и 5хN параметров, характеризующих разброс характеристик слоя для каждой серии экспериментов:

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(x_1, \dots, x_5, \mathbf{a}, \mathbf{b}). \quad (16)$$

Значения матриц **a** и **b** ограничиваются постоянными A и B путем замены переменных: **a** = A\*SIN(x), **b** = B\*SIN(x), где A выбираем так, чтобы  $\psi \leq 90^\circ$ , постоянная B характеризует разброс характеристик слоя.

Для решения расширенной задачи оптимизации в качестве целевой рассматривалась функция

$$d^2(\mathbf{y}) = d^2(x, a) = V_1 \sum_{i=1}^N (V_{1ii}) (s_i^{\text{числ}} - s_i^{\text{эксп}})^2 + V_2 \cdot \sum_{i=1}^3 (V_{2ii}) (y_i^{\text{числ}}(a) - j_i^{\text{эксп}})^2 + V_3 \cdot \sum_{i=1}^3 (V_{3ii}) (\Delta[s_i^{\text{числ}}])^2, \quad (17)$$

где  $V_{1ii} = 1/(s_i^{\text{эксп}})^2$ ,  $V_{2ii} = 1/(j_i^{\text{эксп}})^2$ ,  $V_{3ii} = 1/([s_i^{\text{числ}}])^2$  - нормирующие множители,  $V_i$ ,  $i=1,3$  – вес. При минимизации  $\delta^2(\mathbf{x})$  (12) уравнения (5)-(8) удовлетворяются точно. В случае минимизации  $\delta^2(\mathbf{y})$  они удовлетворяются приближенно.

На рис.2 кривые 1-3 соответствуют случаям отклонения  $\Delta[\sigma^{\text{числ}}]$  для постоянной  $B \cdot 100\% = 10, 14, 18\%$ , при весах  $V_i = 1$ ,  $A = 0.2$ . Зависимость отклонения  $(\psi^{\text{числ}} - \varphi^{\text{эксп}}) / \varphi^{\text{эксп}}$  с увеличением  $\varphi^{\text{эксп}}$  близка к линейной и для  $\psi^{\text{числ}} = 25^\circ$  отклонение  $\psi^{\text{числ}}$  составляет 1-3%, для  $\psi^{\text{числ}} = 75^\circ$  соответственно 19, 14 и 10%,  $\delta_s = 9-10\%$ . Оптимальному сочетанию параметров, принятому в работе, соответствует равное среднее отклонение между численными и экспериментальными напряжениями и углами намотки, а также отклонениями прочностных характеристик в различных сериях экспериментов от среднего значения. Такому свойству соответствует решение, полученное при  $B = 14$ ,:  $[s_{11}^+] = 2.34 \text{ ГПа}$ ,  $[s_{11}^-] = 0.0812 \text{ ГПа}$ ,  $[s_{22}^-] = 0.047 \text{ ГПа}$ ,  $[s_{12}^\pm] = 0.064 \text{ ГПа}$ , значение  $[s_{22}^+]$  выходит на нижнюю границу интервала. Для трех видов

внешней нагрузки (растяжение, сжатие, внутреннее давление), которой подвергались образцы  $\delta_s = 9.4\%$ , что в 4 раза ниже, чем в случае минимизации функционала (12).

Принимать в качестве ограничений значения прочности арматуры и связующего нецелесообразно. Необходимо выявить часть значений искомых пределов прочности ленты, которая устойчива к изменениям границ поиска и попадает в разумные интервалы, остальные значения искусственно ограничить. Это приводит к среднему отклонению расчетных и экспериментальных напряжений  $\delta_s = 37.9\%$ . Расширение минимизируемого вектора за счет параметров, характеризующих учет технологических факторов на прочностные свойства ленты и разброс характеристик слоя в экспериментах, привело к уменьшению суммарной невязки  $\delta^2$  в 9 раз, а  $\delta_s$  - в 4 раза. Задача устойчива к вариациям исходных данных.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №99-01-00410.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Терегулов И.Г., Сибгатуллин Э.С. Критерий разрушения для многослойных композитных пластин и оболочек // Мех. комп. материалов.- 1990.- №1.- С.74-79.
2. Гусев С.В., Каюмов Р.А. Определение несущей способности многослойных оболочек // Труды международной конференции “Актуальные проблемы механики оболочек”.- Казань.- 1998.- С. 69-73.
3. Алексеев К.П., Каюмов Р.А., Терегулов И.Г., Фахрутдинов И.Х. Механические характеристики органо- и углепластиковых труб, изготовленных методом перекрестной намотки // Мех. комп. материалов.- 1998.- №4.- С.4-20.
4. Каюмов Р.А. Об одном методе двусторонней оценки предельной нагрузки // Проблемы прочности. - 1992. - С. 51-55.
5. Каюмов Р.А., Голованов А.И. Гусев С.В., Оценка предельной нагрузки для оболочек из материала с различными пределами текучести при растяжении и сжатии // Труды 17 Межд. Конф. по теории пластин и оболочек, Казань, 1996. - С. 38-43.
6. Винсон Ж.Р., Сираковский Р.Л., Поведение конструкций и композитных материалов / Пер. с англ. под ред. Васильева В.В., Митина Б.С. М.: Металлургия, 1991.-264с.
7. Удрис А.О., Упитис З.Т., Экспериментальное исследование упругих и прочностных свойств эпоксидного связующего ЭДТ-10 в условиях сложного напряженного состояния // Мех. комп. материалов.- 1988.- №6.- С.4-20.