УДК 517.542

Р.Б. Салимов, В.В. Селезнев

К ВЫЧИСЛЕНИЮ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ОДНОМ СЛУЧАЕ

Рассмотрим сингулярный (в смысле главного значения) интеграл

$$\int\limits_0^{2\pi} \varphi(\gamma) \prod_{k=1}^{n} \left|\sin\frac{\gamma - c_k}{2}\right|^{-\chi_k} \frac{d\gamma}{\sin\frac{\gamma-\gamma_0}{2}}, \quad (1)$$

где $0< c_1< c_2< \ldots < c_n< 2\pi$, $0 < \chi_k<1$, $0 \le \gamma_0 \le 2\pi$, $\gamma_0 \ne c_k$, $k = 1,2,\ldots,n$; $\varphi(\gamma)$ – функция, удовлетворяющая условию Гельдера на каждом из интервалов (c_k, c_{k+1}), включая концы, $k = 0,1,2, \ldots, n$ и терпящая разрыв первого рода в точках c_k, $c_0 = 0$, $c_{n+1} = 2\pi$, причем $\varphi(0) = -\varphi(2\pi)$.

Необходимость в вычислении такого интеграла возникает, в частности, как это ясно из изложенного ниже, при нахождении граничных значений мнимой части, когда заданы граничные значения действительной части функции, аналитической в круге $|\xi| < 1$ в плоскости $\xi = \rho e^{i\gamma}$, $\rho = |\xi|$ и обращающейся в нуль в некоторой точке окружности $|\xi| = 1$, а также при решении краевой задачи Гильберта для функции, аналитической в круге $|\xi| < 1$, когда коэффициенты краевого условия имеют разрывы первого рода, а индекс задачи – нечетное число [4].

В отличие от аналогичного интеграла с ядром Гильберта $\mathrm{ctg}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}$, рассмотренного в работе [3], в точке $\gamma_0 = 0$ ($\gamma_0 = 2\pi$) интеграл (1) расходится при $\varphi(0) \ne -\varphi(2\pi)$.

Покажем, что интеграл (1) можно привести к виду, удобному для приближенного вычисления, выразив его через сингулярный интеграл с плотностью, удовлетворяющей условию Гельдера в интервале $[0, 2\pi]$ и обращающейся в нуль на концах интервала. Для простоты предположим, что функция $\varphi(\gamma)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\mu_k>\chi_k$, как в левой, так и в правой окрестностях точки c_k, включая c_k, $k = 1,2,\ldots,n$.

В дальнейшем под $\arg[(\xi - e^{ick})/2)]$ будем понимать непрерывную в круге $|\xi| < 1$ ветвь, которая при $\xi = e^{i\gamma}$ принимает значения

$$\theta_k(\gamma) = \begin{cases} 3\pi/2 + (\gamma + c_k)/2 & \text{при } 0 \le \gamma \le c_k \\ \pi/2 + (\gamma + c_k)/2 & \text{при } c_k \le \gamma \le 2\pi \end{cases}$$

поэтому функция $(\xi - e^{ick})/2$ при $\xi = e^{i\gamma}$ будет принимать значения $\left|\sin\frac{\gamma-c_k}{2}\right| e^{i\theta_k(\gamma)}$, $k = 1,2,\ldots, n$.

Возьмем аналитическую в круге $|\xi| < 1$ функцию $\mathbf{l}_k e^{i\alpha_k}[(\xi - e^{ic_k})/2]^{-\chi_k}(\xi - e^{ic_0})/2$ с действительными постоянными $\mathbf{l}_k$, α_k, ($\mathbf{l}_k > 0$), которая на окружности $\xi = e^{i\gamma}$ принимает значения

$$P_k(\gamma) + Q(\gamma) =$$

$$= \mathbf{l}_k \left|\sin\frac{\gamma-c_k}{2}\right|^{-\chi_k} \left|\sin\frac{\gamma}{2}\right| e^{i[a_k + q_0(g) - c_k q_k(g)]}, \quad (2)$$

где $P_k(\gamma) = \mathrm{Re}[P_k(\gamma) + iQ(\gamma)]$, $k = 1,2,\ldots, n$.

Как известно (см., например [1], с.59)

$$Q_k(\gamma) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P_k(\gamma)\mathrm{ctg}\frac{\gamma-\gamma_0}{2}d\gamma + \upsilon_0, \quad \gamma_k = c_k,$$

где υ_0 – действительная постоянная. Замечая, что $Q_k(0) = 0$, находим υ_0, тогда предыдущее соотношение с учетом (2) запишется так:

$$\frac{\mathbf{l}_k \sin[\alpha_k + \theta_0(\gamma_0) - \chi_k\theta_k(\gamma_0)]}{\left|\sin\frac{\gamma_0 - c_k}{2}\right|^{\chi_k}} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathbf{l}_k \cos[\alpha_k + \theta_0(\gamma_0) - \chi_k\theta_k(\gamma)]}{\left|\sin\frac{\gamma-c_k}{2}\right|^{\chi_k}} \cdot \frac{d\gamma}{\sin\frac{\gamma-\gamma_0}{2}}, \quad (3)$$

$0 \le \gamma_0 < c_k$, $c_k < \gamma_0 \le 2\pi$, $k = 1,2,\ldots, n$.

Аналогично взяв функцию $\mathbf{l} e^{-i\theta_0(0)}(\xi - e^{ic_0})/2$, $\mathbf{l}$ – const, $\mathbf{l} > 0$, придем к формуле

$$\mathbf{l} \sin[-\theta_0(0) + \theta_0(\gamma_0)] =$$

$$= -\frac{1}{2p}\int\limits_0^{2p} \mathbf{l}_k \cos[-q_0(g_0) - q_0(g)] \frac{dg}{\sin\frac{g-g_0}{2}}, \quad (4)$$

$0 < \gamma_0 \le 2\pi$ (эта формула получается из предыдущей при $\chi_k = 0$, $\alpha_k = -\theta_0(0)$).

Подберем постоянные $\mathbf{l}_k$, α_k так, чтобы

$\mathbf{l} \cos[-\alpha_k + \theta_0(c_k)] - \chi_k\theta_k(c_k - 0)] = \varphi(c_k - 0)/g_k(c_k)$,

$\mathbf{l} \cos[-\alpha_k + \theta_0(c_k)] - \chi_k\theta_k(c_k + 0)] = \varphi(c_k + 0)/g_k(c_k)$, где $g_k(\gamma) = \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\left|\sin\frac{\gamma-c_j}{2}\right|^{\chi_j}$.

Замечая, что $\theta(c_k - 0) = \theta(c_k + 0) + \pi$, эту систему запишем так:

$$\lambda\sin[-\alpha_k + \theta_0(c_k)] - \chi_k\theta_k(c_k + 0)] =$$

$$= \frac{\varphi(c_k - 0) - \varphi(c_k + 0)\cos(\chi_k\pi)}{g_k(c_k)\sin(\chi_k\pi)}, \qquad (5)$$

$$\lambda\cos[-\alpha_k + \theta_0(c_k) - \chi_k\theta_k(c_k + 0)] = \varphi(c_k + 0)/g_k(c_k).$$

Отсюда найдем $\lambda_k > 0$ и $\alpha_k + \theta_0(c_k)] - \chi_k\theta_k(c_k + 0)$ в интервале $[0, 2\pi]$, затем α_k.

С учетом (3), (4) интеграл (1) запишем так:

$$\int_0^{2\pi}\varphi(\gamma)\prod_{k=1}^{n}\left|\sin\frac{\gamma-c_k}{2}\right|^{-\chi_k}\frac{d\gamma}{\sin\frac{\gamma-\gamma_0}{2}} = \qquad (6)$$

$$= \int_0^{2\pi}\Bigg\{\varphi(\gamma)\prod_{k=1}^{n}\left|\sin\frac{\gamma-c_k}{2}\right|^{-\chi_k} -$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k\cos[\alpha_k+\theta_0(\gamma)-\chi_k\theta_k(\gamma)]}{\left|\sin\frac{\gamma-c_k}{2}\right|^{\chi_k}} -$$

$$-\lambda\cos[-\theta_0(0)+\theta_0(\gamma)]\Bigg\}\frac{d\gamma}{\sin\frac{\gamma-\gamma_0}{2}}$$

$$-\sum_{k=1}^{n}2\pi\,\frac{\lambda_k\sin[\alpha_k+\theta_0(\gamma)-\chi_k\theta_k(\gamma_0)]}{\left|\sin\frac{\gamma_0-c_k}{2}\right|^{\chi_k}} -$$

$$-2\pi\lambda\sin[-\theta_0(0)+\theta_0(\gamma)],$$

$0 \le \gamma_0 \le 2\pi$, $\gamma_0 \neq c_k$, здесь будем считать, что

$$\lambda = \varphi(0)\prod_{k=1}^{n}\left|\sin\frac{\lambda_k}{2}\right|^{-\chi_k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k\cos[\alpha_k+\theta_0(0)-\chi_k\theta_k(0)]}{\left|\sin\frac{c_k}{2}\right|^{\chi_k}}. \qquad (7)$$

С учетом результатов Н.И.Мусхешвили [2] (с.22), нетрудно проверить, что выражение в фигурных скобках формула (6) – плотность интеграла правой части этой формулы есть функция, удовлетворяющая условию Гельдера в интервале $[0, 2\pi]$; она обращается в нуль на концах интервала.

Формулу (6) можно использовать также для установления поведения интеграла (1) вблизи точки c_k, при этом наряду с соотношением (5) надо принять во внимание формулу

$$\lambda\sin[\alpha_k + \theta_0(c_k) - \chi_k\theta_k(c_k - 0)] =$$

$$= -\frac{\varphi(c_k + 0) - \varphi(c_k - 0)\cos(\chi_k\pi)}{g_k(c_k)\sin(\chi_k\pi)}.$$

Здесь приходим к результатам, аналогичным известным результатам Н.И. Мусхелишвили, относящимся к поведению сингулярных интегралов с ядром Коши вблизи точек разрыва плотности [2] (с. 95).

Литература

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. –М.: Наука, 1977. 640с.
2. Мусхелашвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. –М.: Наука, 1968. 511с.
3. Салимов Р.Б. К вычислению сингулярных интегралов с ядром Гильберта. Изд. вузов, Математика, 1970, №12. С. 93-96.
4. Салимов Р.Б., Селезнев В.В. К решению краевой задачи Гильберта с разрывными коэффициентами. Труды семинара по краевым задачам. Вып. 16. Изд. КГУ, 1979. С. 149-162.