УДК 539.3

Р.А. Каюмов, К.П. Алексеев, Л.С. Ольховик

К ОЦЕНКЕ УПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРИАЛОВ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ КОНСТРУКЦИЙ

Рассмотрена задача идентификации жесткостных характеристик органопластикового жгута по результатам испытаний намоточных цилиндрических оболочек. Построен расширенный функционал, из условия минимума которого отыскиваются неизвестные жесткости и который позволяет уменьшить невязки между экспериментальными и расчетными данными по сравнению с невязками, полученными при использовании традиционных подходов. Предложена методика построения доверительных интервалов для идентифицируемых параметров.

1. Пусть известны механико-математические модели поведения материала и изготовленных из него конструкций. Обозначим через векторы $s(x)$ и $e(x)$ их статические и кинематические характеристики в точке x, через $a^0(x)$ - вектор упругих характеристик, связывающих $s(x)$ и $e(x)$ на основе закона, который запишем в следующей операторной форме:

$$s = f(e, a^0). \tag{1.1}$$

На a^0 накладываются ограничения, вытекающие из технических и термодинамических соображений. Запишем их в виде:

$$B_1(a^0) = 0, \quad B_2(a^0) \geq 0. \tag{1.2}$$

Тогда математическую модель поведения изделия, изготовленного из рассматриваемого материала, представим в виде следующей системы уравнений:

$$N(e, a^0, k) = q, \;\; x \subset w, \tag{1.3}$$

где w - область, занимаемая конструкцией; $k(x)$ - вектор конструктивных параметров.

Пусть в области $g^{\exp} \subset w$ известны полученные в эксперименте отклики $e^{\exp}(x)$ на воздействия $q^{\exp}(x)$, т.е.

$$e(x) = e^{\exp}(x), \quad x \subset g^{\exp}. \tag{1.4}$$

Представим решение уравнения (1.3) в виде $e = N^{-1}(a^0, k)q$.

Для формулировки вариационной задачи идентификации механических характеристик $a^0(x)$ чаще всего используют меру близости расчетных значений функции $e(x)$, полученной из (1.3), с экспериментальной функцией $e^{\exp}(x)$ и представляют ее в виде:

$$(z_e^2)_{\min} = \min_{a^0(x)} \int_{g^{\exp}} r^2[N^{-1}(a^0, k^{\exp})q^{\exp}, e^{\exp}]dg,$$

$$B_1(a^0) = 0, \quad B_2(a^0) \geq 0, \tag{1.5}$$

$$r^2(u, \mathrm{v}) = (u - \mathrm{v})^{\mathrm{T}} W (u - \mathrm{v}),$$

где W - симметрическая положительно определенная матрица весовых коэффициентов; g - область сравнения функций u, v.

В качестве альтернативного варианта невязку между расчетными и экспериментальными значениями воздействий $q(x)$ и $q^{\exp}(x)$ можно записать в виде:

$$(z_q^2)_{\min} = \min_{a^0(x)} \int_{g^{\exp}} r^2[N(e^{\exp}, a^0, k^{\exp})q^{\exp}]dg,$$

$$B_1(a^0) = 0, \quad B_2(a^0) \geq 0. \tag{1.6}$$

В данной работе предлагается рассматривать расширенную задачу идентификации, в которой искомыми считаются функции e, q, k, a^0, приближенно удовлетворяющие следующей системе уравнений:

$$N(e, a^0, k) = q,$$

$$s = f(e, a^0), \;\; a - a^0 = 0, \;\; x \subset w$$

$$e - e^{\exp} = 0, \;\; q - q^{\exp} = 0,$$

$$k - k^{\exp} = 0, \;\; x \subset g^{\exp}, \tag{1.7}$$

где a^0 - вектор, принадлежащий предполагаемому классу функций; a - вектор из более широкого класса. Соотношения (1.2) будем считать удовлетворяющимися строго.

Введем функции $d\,e = e - e^{\exp}$, $d\,q = q - q^{\exp}$, $d\,k = k - k^{\exp}$, $d\,a = a - a^0$ и потребуем их малость по сравнению с $e^{\exp}, q^{\exp}, k^{\exp}, a^0$.

Вариационная задача типа (1.5) запишется в следующем виде :

$$(z_e^2)_{\min} = \min_{a^0, da, dk, dq} \int_{g^{\exp}} r^2[N^{-1}(a, k)q, e^{\exp}]dg +$$

$$+\int_{w} r^2(a,a^0)dw + \int_{w} r^2(q,q^{\exp})dw +$$

$$+ \int_{g^{\exp}} r^2(k,k^{\exp})dg \qquad (1.8)$$

$$B_1(a^0)=0, \quad B_2(a^0)\ge 0,$$

$$B_1(a)=0, \quad B_2(a)\ge 0$$

$$\|dq\| \le b_q \|q^{\exp}\|, \quad b_q << 1, \; \|dk\| \le b_k \|k^{\exp}\|,$$

$$b_k << 1, \; \|da\| \le b_a \|a^0\|, \quad b_a << 1$$

2. Рассмотрим задачу расчета жесткостных характеристик органопластикового армированного материала типа ленты, из которой путем намотки под углом ±φ к образующей изготовлены цилиндрические оболочки. Поведение ленты в осях ортотропии будем описывать соотношениями плоского напряженного состояния в виде:

$$\{s\}^T = \{s^{11}, s^{22}, s^{12}\}^T,$$

$$\{e\}^T = \{e_{11}, e_{22}, 2e_{12}\}^T, \{s\} = [D]^0\{e\}. \quad (2.1)$$

Здесь и далее параметры напряженно-деформированного состояния записываются в осях ортотропии в виде (2.1), а в географических осях оболочки - с волной над параметрами. Тогда связь между ними можно представить в виде :

$$\{\tilde{s}\} = [S]\{s\}, \; \{e\} = [S]^T\{\tilde{e}\};$$

$$[S] = \begin{bmatrix} \cos^2 j & \sin^2 j & -\sin 2j \\ \sin^2 j & \cos 2j & \sin 2j \\ \sin 2j/2 & -\sin 2j/2 & \cos 2j \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Рассмотрим уравнения равновесия

$$\tilde{s}^{11}h = P/(2pR), \; \tilde{s}^{22}h = qR, \quad (2.3)$$

где P - осевая сила; q - внутреннее давление.

Выразим $\{\tilde{s}\}$ через $\{\tilde{e}\}$ и матрицы [D] и [S]:

$$\{\tilde{s}\} = [S]\{s\} = [S][D]\{e\} =$$

$$= [S][D][S]^T\{\tilde{e}\} = [\tilde{D}]\{\tilde{e}\}.$$

Поскольку $\tilde{e}_{12} = 0$, то из системы (2.3) получим уравнения

$$[\tilde{d}]\begin{Bmatrix} \tilde{e}_{11} \\ \tilde{e}_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P/(2pRh) \\ qR/h \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{P} \\ \tilde{q} \end{Bmatrix}, \quad (2.4)$$

где $[\tilde{d}]$ - минор элемента $\tilde{D}_{33}$ матрицы $[\tilde{D}]$.

Для n оболочек с различными углами намотки при действии q и (или) P записывается система $2n$ уравнений (2.4). Подстановка $\{\tilde{e}\}^{\exp}$, $P^{\exp}$ и $q^{\exp}$ в (2.4) дает линейную систему уравнений относительно искомых характеристик D_{ij}:

$$[C]\{a\}^0 = \{b\}, \; a_1^0 = D_{11}, \quad a_2^0 = D_{22},$$

$$a_3^0 = D_{33}, \quad a_4^0 = D_{12}. \quad (2.5)$$

На неизвестные a_i^0 накладываются ограничения вида:

$$a_i^0 > 0, \quad i = 1,2,3, \quad a_1^0 a_2^0 - a_4^0 a_4^0 > 0. \quad (2.6)$$

К системе (2.4) добавляются следующие уравнения:

$$\{a\}^0 - \{a\}_{(k)} = 0, \; j_{(k)} - j_{(k)}^{\exp} = 0,$$

$$\{\tilde{e}\}_{(k)} - \{\tilde{e}\}_{(k)}^{\exp} = 0,$$

$$\tilde{P}_{(k)} - \tilde{P}_{(k)}^{\exp} = 0, \quad \tilde{q}_{(k)} - \tilde{q}_{(k)}^{\exp} = 0, \quad (2.7)$$

где k - номер эксперимента.

Минимизация (2.4), (2.7) дает значения искомых параметров $\{a\}^0$.

Вычисления были проведены с использованием экспериментальных данных, приведенных в [1] (принималось: $b_e \le 0{,}2$, $b_q \le 0{,}2$, $b_a \le 0{,}2$, $b_j \le 0{,}2$). Расчеты показали, что использование традиционного подхода, т.е. минимизация (1.6), приводит к значениям расчетных нагрузок q и P, в несколько раз отличающихся от экспериментальных. При применении же (1.8) разница между ними составляет не более 20 %.

С целью отыскания доверительных интервалов для D_{ij} использовалась следующая процедура. По результатам экспериментов вычислялись выборочные средние значения и дисперсии для $\{\tilde{e}\}, j$, $\tilde{P}, \tilde{q}$. С помощью генератора случайных чисел определялись их значения, соответствующие нормальному распределению. После подстановки в систему (2.4), (2.7) и минимизации ее невязки определялись D_{ij} для различного числа выборок. Результаты расчетов доверительных интервалов и средних значений D_{ij}, проведенных с использованием экспериментальных данных из работы [1], приведены на рис.1а,1б.

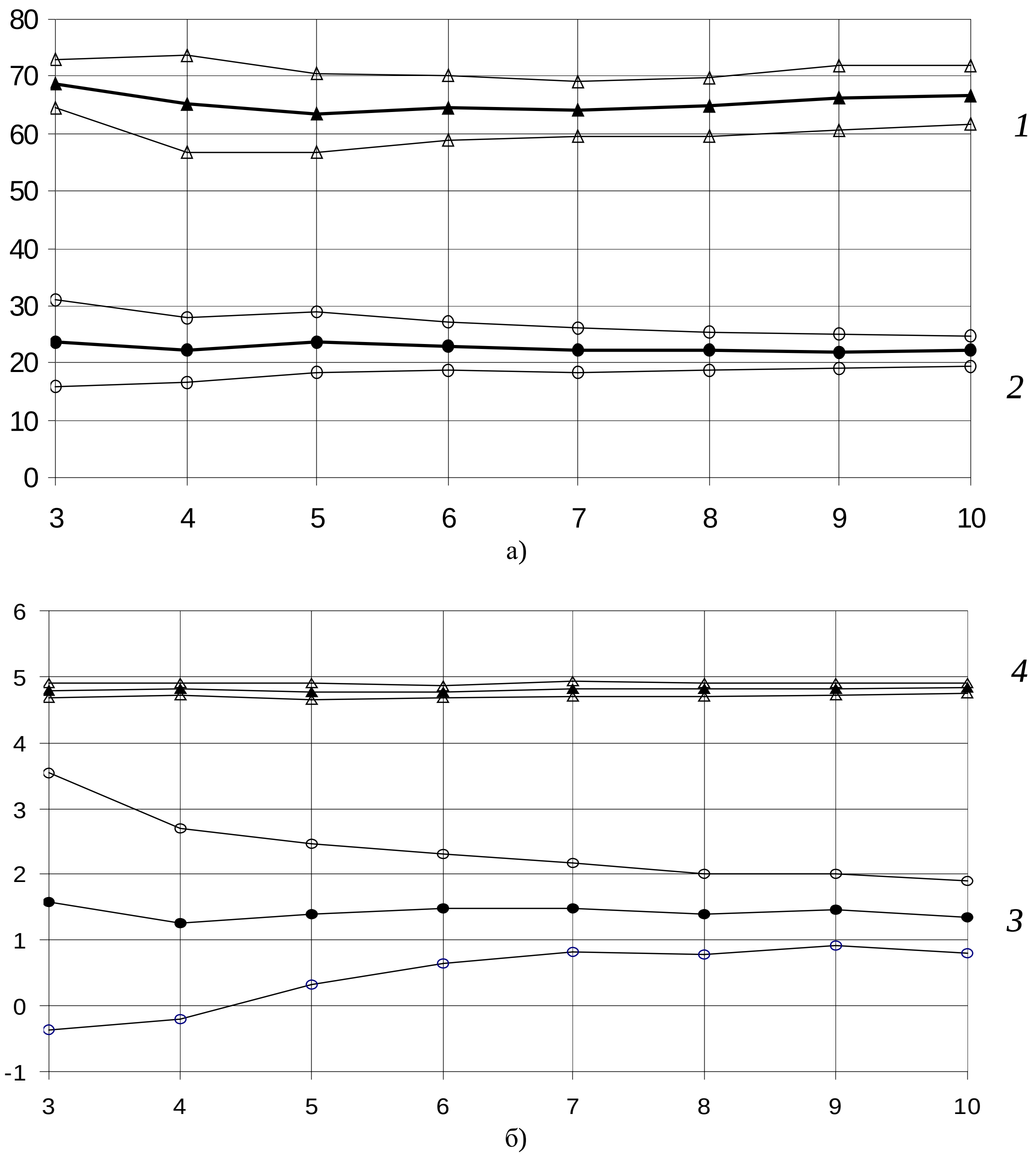

Рис.1а,1б. Зависимости жесткостных характеристик (в ГПа) от объема выборки (*1 - D11, 2 - D22*5, 3 - D12, 4 - D33+3*)

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проект № 99-01-00410, и АН Татарстана.

Литература

1. Алексеев К.П., Каюмов Р.А., Терегулов И.Г., Фахрутдинов И.Х. Механические характеристики органо- и углепластиковых труб, изготовленных методом перекрестной намотки // Механика композиционных материалов и конструкций. - 1998, т. 4, № 4. С. 4-20.