

УДК 539.3

Каюмов Р.А. – доктор физико-математических наук, профессор

E-mail: kayumov@gambler.ru

Мухамедова И.З. – кандидат физико-математических наук, доцент

E-mail: muhamedova-inzilija@mail.ru

Казанский государственный архитектурно-строительный университет

Адрес организации: 420043, Россия, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1

Ковтунова Т.И. – кандидат педагогических наук, доцент

E-mail: kovtunova@kspu.kaluga.ru

Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского

Адрес организации: 248023, Россия, г. Калуга, ул. Степана Разина, д. 26

Анализ чувствительности задачи идентификации механических характеристик тканевого композита*

Аннотация

Разработана методика экспериментального определения жесткостных характеристик ткани по результатам испытаний образцов, вырезанных под разными углами к основе при различных растягивающих усилиях. Для численного анализа процесса деформирования образцов тканей применяется принцип Лагранжа в приращениях. Формулируется задача математического программирования о минимизации квадратичной невязки полученной системы уравнений, из решения которой определяются механические характеристики тканевого композита. Проведен анализ влияния возмущения исходных экспериментальных данных на результаты идентификации для нелинейной модели деформирования. Выявлены устойчивые и неустойчивые компоненты вектора искомых неизвестных.

Ключевые слова: модель, идентификация, жесткостные характеристики, эксперимент.

При расчете конструкций необходимо решить ряд проблем, в том числе вопросы отыскания механических характеристик материала, выбора расчетной схемы (математических моделей поведения материала и конструкций, представления внешних воздействий, условий закрепления), выбора метода решения уравнений. Традиционные методы определения механических характеристик композитных материалов иногда наталкиваются на технические трудности. Кроме того, они могут сильно зависеть и от технологии изготовления [1-2]. Поэтому в последнее время большое внимание уделяется методам, называемым методами идентификации, позволяющим определять механические характеристики материала на основе учета экспериментальных результатов о работе конструкции [4-6].

Общая постановка задачи, исследуемой в данной работе, заключается в следующем. Рассматривается конструкция, изготовленная из материала, механические характеристики которого неизвестны. Считаются известными данные испытаний изделия и (или) его аналогов с замером ряда уровней экспериментальных внешних воздействий (например, силовых факторов) и соответствующих им откликов конструкций в некоторых областях или точках (например, кинематических факторов – перемещений или деформаций), а также математические модели поведения материала и конструкций подобного типа. Ставится задача определения механических характеристик материала и параметров отклика рассматриваемого изделия на заданное внешнее воздействие с учетом некоторых данных экспериментов при других (и возможно заданном) воздействиях на это изделие и его аналоги.

Суть метода решения этой задачи заключается в следующем. Результаты, полученные во время испытаний, записываются в виде зависимостей между воздействиями и откликами конструкций с использованием математической модели их

* Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (проект 2012-1.4-12-000-1004-006).

поведения. К ним добавляются соотношения «воздействие-отклик» для интересующего расчетчика заданного внешнего силового фактора. Формулируется задача математического программирования о минимизации квадратичной невязки всей или части полученной системы уравнений, из решения которой определяются как механические характеристики материала, так и параметры отклика конструкций (в том числе и на заданное воздействие). Ниже этот подход исследован для случая, когда материал представляет собой нелинейно-упругое тело.

В дальнейшем будем оперировать только усилиями, приходящимися на единицу длины сечения образца. Будем обозначать их через N_{11}, N_{22}, N_{12} (усилия вдоль основы, утка и усилие сдвига). Соответствующие деформации обозначим через $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \gamma_{12}$. Введем векторы $\{N\}, \{\varepsilon\}$:

$$\{N\} = \{N_{11}, N_{22}, N_{12}\}^T, \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \gamma_{12}\}^T,$$

индекс «Т» означает операцию транспонирования.

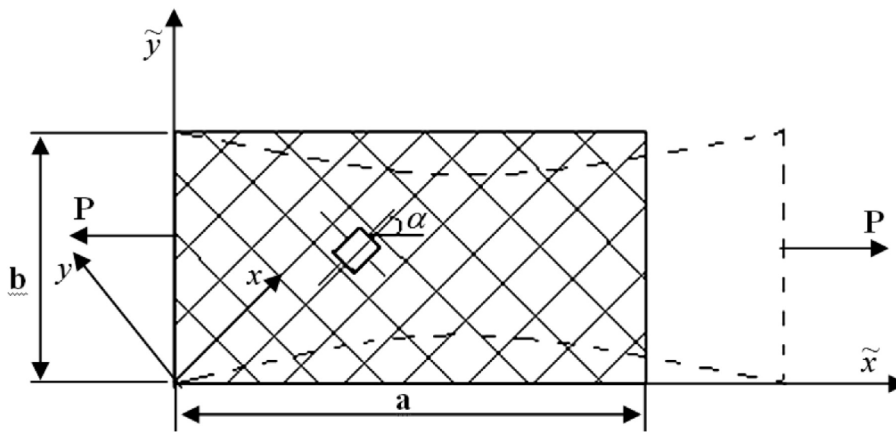


Рис. 1. Деформирование образца ткани, вырезанного под углом α к основе под действием силы P

Для нелинейного случая в осях ортотропии упругий потенциал примем в следующей форме:

$$W = D_{110}\varepsilon_{11}^2/2 + D_{112}\varepsilon_{11}^4/12 + D_{120}\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + D_{220}\varepsilon_{22}^2/2 + D_{222}\varepsilon_{22}^4/12 + D_{330}\gamma_{12}^2/2 + D_{334}\gamma_{12}^6/30 \tag{1}$$

В приращениях связь погонных усилий через приращения деформаций запишем в виде:

$$d\{N\} = [D]d\{\varepsilon\}, \tag{2}$$

где

$$D_{11} = \frac{d^2W}{d\varepsilon_{11}^2}, D_{22} = \frac{d^2W}{d\varepsilon_{22}^2}, D_{33} = \frac{d^2W}{d\gamma_{12}^2}, D_{12} = \frac{d^2W}{d\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}}. \tag{3}$$

Согласно (1), (2) получаем:

$$\begin{cases} D_{11} = D_{110} + D_{112}\varepsilon_{11}^2, & D_{22} = D_{220} + D_{222}\varepsilon_{22}^2 \\ D_{12} = D_{120}, & D_{33} = D_{330} + D_{334}\gamma_{12}^4 \\ D_{23} = D_{32} = D_{13} = D_{31} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Упругий закон в лабораторной системе координат $\tilde{x}\tilde{y}$, т.е. в осях, параллельных краям испытываемого прямоугольного образца ткани, изображенного на рис. 1, примет вид:

$$d\{\tilde{N}\} = [\tilde{D}]d\{\tilde{\varepsilon}\}, \tag{5}$$

где $[\tilde{D}] = [T][D][T]^T$, $T = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin^2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha / 2 & -\sin 2\alpha / 2 & \cos 2\alpha \end{bmatrix}$.

Для численного анализа процесса деформирования образцов тканей применялся принцип Лагранжа в приращениях в виде:

$$\int_{\Omega} \Delta N^T \delta \varepsilon d\Omega = \int_{\omega} \Delta p^T \delta u. \tag{6}$$

Здесь Ω – область, занимаемая образцом ткани, ω ее граница, Δp – приращение вектора погонных сил, приложенных на этой границе, $\delta \varepsilon$, δu – вариации векторов деформаций и перемещений. Для дискретизации области применялся МКЭ с шестиузловым треугольным элементом второго порядка [7].

Задачу идентификации параметров жесткостных характеристик D_{ij} можно представить в отыскании минимума следующей квадратичной невязки между расчетными и экспериментальными данными:

$$\begin{aligned} \delta^2 = & v_1 [(P_y^{cp})^{эксн} - (P_y^{cp})^{расч}]^2 \Big|_{P_1 \alpha_1} + m_1 [\Delta a^{эксн} - \Delta a^{расч}]^2 \Big|_{P_1 \alpha_1} + k_1 [\Delta b^{эксн} - \Delta b^{расч}]^2 \Big|_{P_1 \alpha_1} + \\ & v_2 [(P_y^{cp})^{эксн} - (P_y^{cp})^{расч}]^2 \Big|_{P_2 \alpha_2} + m_2 [\Delta a^{эксн} - \Delta a^{расч}]^2 \Big|_{P_2 \alpha_2} + k_2 [\Delta b^{эксн} - \Delta b^{расч}]^2 \Big|_{P_2 \alpha_2} + \\ & \dots + \\ & + v_n [(P_y^{cp})^{эксн} - (P_y^{cp})^{расч}]^2 \Big|_{P_n \alpha_n} + m_n [\Delta a^{эксн} - \Delta a^{расч}]^2 \Big|_{P_n \alpha_n} + k_n [\Delta b^{эксн} - \Delta b^{расч}]^2 \Big|_{P_n \alpha_n} \end{aligned} \tag{7}$$

здесь n – количество проведенных экспериментов, $\Delta a^{эксн}, \Delta b^{эксн}$ – экспериментальные значения изменений сторон образца в продольном и в поперечном направлениях соответственно (см. рис. 1), а $\Delta a^{расч}, \Delta b^{расч}$ – расчетные значения вышеперечисленных изменений. P_1, P_2, \dots, P_n – величины нагрузок, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – углы между основой и длинной стороной образца, $v_1, \dots, v_n, m_1, \dots, m_n, k_1, \dots, k_n$ – весовые коэффициенты.

На неизвестные D_{ij} накладываются вытекающие из условия устойчивости материала следующие ограничения:

$$D_{11} D_{22} - D_{12}^2 > 0. \tag{8}$$

Поэтому упругий потенциал должен подбираться специальным образом. В частности, условие (8) будет обеспечено, если принять $D_{110} D_{220} - D_{120}^2 > 0$.

Таким образом, проблема сводится к задаче математического программирования о минимизации (7) при ограничении (8), с применением стандартных градиентных методов.

С целью отработки методик приведенный выше подход сначала был оттестирован следующим образом. Сначала была решена прямая задача с заданными жесткостными характеристиками для образцов, вырезанных под углами $0^\circ, 90^\circ, 45^\circ$. Полученные результаты считались «экспериментальными». Затем решалась обратная задача на основе полученных «экспериментов», т.е. определялись жесткостные характеристики данной математической модели. Результаты показали работоспособность методики и разработанной программы.

С целью исследования устойчивости рассматриваемой задачи к вариациям исходных данных были проведены численные эксперименты с возмущениями для усилия P и поперечной деформации на величины до 20 %. Значения для жесткостных характеристик тканевого композита приняты в виде:

$$\begin{aligned} D_{110} = 100, \quad D_{112} = 60000, \quad D_{220} = 200, \quad D_{222} = 120000, \\ D_{120} = 35, \quad D_{122} = 10000, \quad D_{330} = 37.5, \quad D_{334} = 20000. \end{aligned} \tag{9}$$

В (9) жесткостные коэффициенты имеют размерность $[МПа * мм]$.

На рис. 2 представлены графики зависимости параметров $D_{ijk} / D_{ijk}^{мочн}$ от возмущений исходных данных для усилия P и поперечной деформации (рис. 1). За точное решение приняты зависимости (9).

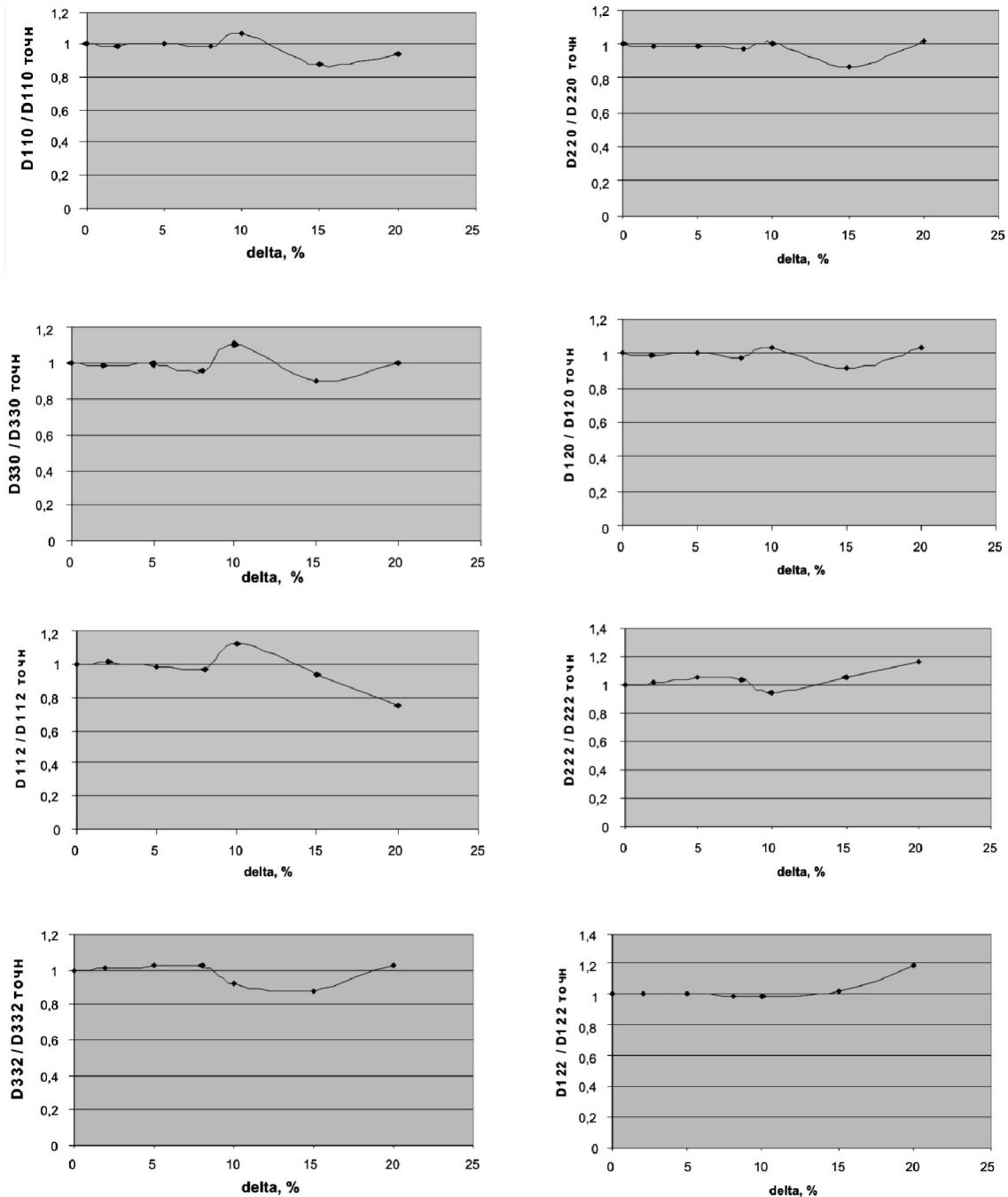


Рис. 2. Графики зависимостей параметра $D_{ijk} / D_{ijk}^{мочн}$ от возмущений $delta, \%$ исходных данных для нагрузки и поперечной деформации

Согласно рис. 2 проведен анализ влияния возмущения исходных экспериментальных данных на результаты идентификации для нелинейной модели деформирования. Численные эксперименты показали, что рассмотренная задача является устойчивой к вариациям исходных данных для нагрузки и поперечной деформации.

Список литературы

1. Мешков Е.В., Кулик В.И., Нилов А.С., Упитис З.Т. Влияние технологических факторов на механические характеристики однонаправленного органопластика // МКМ, 1990, № 3. – С. 526-535.
2. Пичугин В.С., Коробейников А.Г., Степанычев Е.И. Влияние технологии на механические характеристики сетчатых оболочек из намоточных композитов // МКМ, 1990, № 6. – С. 1119-1122.
3. Терегулов И.Г. Конечные деформации тонких анизотропных и композитных оболочек и определяющие соотношения // МКМ, 1987, № 4. – С. 654-660.
4. Каюмов Р.А. Связанная задача расчета механических характеристик материала и расчета конструкций из них // Изв. РАН, Мех. тв. тела, 1999, № 6. – С. 118-127.
5. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Таирова Л.П. Идентификация упругих характеристик однонаправленных материалов по результатам испытаний многослойных композитов // Расчеты на прочность, 1989, Вып. 30. – С.16-31.
6. Терегулов И.Г., Бутенко Ю.И., Каюмов Р.А., Сафиуллин Д.Х., Алексеев К.П. К определению механических характеристик нелинейно-упругих композитных материалов // Журнал ПМТФ, 1996, Т. 37, № 6. – С. 170-180.
7. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. – М.: Высшая школа, 1985. – 329 с.

Kayumov R.A. – doctor of physical and mathematical sciences, professor

E-mail: kayumov@rambler.ru

Muhamedova I.Z. – candidate of physical and mathematical sciences, associate professor

E-mail: muhamedova-inzilija@mail.ru

Kazan State University of Architecture and Engineering

The organization address: 420043, Russia, Kazan, Zelenaya st., 1

Kovtunova T.I. – candidate of pedagogical sciences, associate professor

E-mail: kovtunova@kspu.kaluga.ru

Kaluga State University named K.E. Tsiolkovsky

The organization address: 248023, Russia, Kaluga, Stepan Razin st., 26

Sensitivity analysis of the problem of identification of tissue mechanical properties of the composite**Resume**

In the calculation of structures necessary to solve a number of problems, including the question of finding the mechanical characteristics of the material, the design scheme of choice (mathematical models of material behavior and structures, representations of external influences, fixing conditions), select the method of solving the equations. The method for the experimental determination of the stiffness characteristics of the tissue on the results of tests of samples cut at different angles to the stem at different tension. For the numerical analysis of the deformation process of tissue samples used Lagrange principle in increments. In order to work out methods above approach was tested. Results showed robustness of this technique and developed the program.

Formulated mathematical programming problem of minimizing the quadratic discrepancy resulting system of equations, which are determined by solving the mechanical properties of the composite tissue. The effect of the perturbation of initial experimental data to the results of identification for nonlinear model deformation. Numerical experiments show that the considered problem is robust to variations in the source data.

Keywords: model, identification, stiffness characteristics, the experiment.

References

1. Meshkov E.V., Kulik V.I., Niliov A.S., Upitis Z.T. The influence of technological factors on the mechanical properties of unidirectional organoplastic // MSM, 1990, № 3. – P. 526-535.
2. Pichugin V.S., Korobeinikov A.G., Stepanichev E.I. The impact of technology on the mechanical characteristics of the network shells winding composites // MSM, 1990, № 6. – P. 1119-1122.
3. Teregulov I.G. Finite deformation of thin anisotropic and composite shell and defining relations // MSM, 1987, № 4. – P. 654-660.
4. Kayumov R.A. Coupled problem of calculating the mechanical characteristics of the material and structural analysis of them // Izv. RAS, Mech. tv. tela, 1999, № 6. – P. 118-127.
5. Alfutov N.A., Zinovjev P.A., Tairova L.P. Identification of elastic properties of unidirectional material on the test results of multilayer composites // Strength calculations, 1989, Issue 30. – P. 16-31.
6. Teregulov I.G., Butenko Y.I., Kayumov R.A., Safiullin D.H., Alekseev K.P. Determination of mechanical properties of nonlinear elastic composites // Journal PMTF, 1996, T. 37, № 6. – P. 170-180.
7. Obraztsov I.F., Saveljev L.M., Hasanov H.S. The finite element method in problems of structural mechanics, aircraft. – M.: high school, 1985. – 329 p.