



Устойчивость пологих оболочек двоякой кривизны с учетом наличия дискретно вводимых ослаблений

Н.А. Мишуренко¹, А.А. Семенов¹

¹Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет,
г. Санкт-Петербург, Российская Федерация

Аннотация: *Постановка задачи.* Нередки случаи устройства конструктивных ослаблений в составе оболочечных конструкции. При этом учет влияния ослаблений на устойчивость значительно усложняет методику расчета данных конструкций.

Цель работы заключается в определении влияния дискретно вводимых ослаблений на устойчивость пологих оболочек двоякой кривизны.

Задачами исследования являются создание математической модели, учитывающей геометрическую нелинейность, поперечные сдвиги, ортотропию материала, ослабления конструкции; выбор алгоритма для исследования устойчивости оболочки; написание программы для реализации выбранного алгоритма.

Результаты. В работе представлена геометрически нелинейная математическая модель деформирования ортотропных пологих оболочек двоякой кривизны, ослабленных вырезами. Модель основана на гипотезе теории оболочек Тимошенко-Рейснера и представлена в виде функционала полной потенциальной энергии деформации. Для нахождения минимума функционала используется метод Ритца, что сводит задачу к решению системы нелинейных алгебраических уравнений, решение которой осуществляется методом Ньютона. Алгоритм реализован в программном комплексе Maple 2022.

Для рассматриваемых конструкций установлено, что при выключении из работы до 10 % объема конструкции, снижение критической нагрузки не превышает 25 %.

Выводы. Значимость полученных результатов для строительной механики состоит в том, что получена математическая модель, учитывающая геометрическую нелинейность, поперечные сдвиги, ортотропию материала, ослабления конструкции, использование которой позволит исследовать напряженно-деформированное состояние и устойчивость оболочечных конструкций с большей точностью.

Ключевые слова: оболочки, ослабления, устойчивость, критическая нагрузка, метод Ритца, метод Ньютона

Для цитирования: Мишуренко Н.А., Семенов А.А. Устойчивость пологих оболочек двоякой кривизны с учетом наличия дискретно вводимых ослаблений // Известия КГАСУ, 2023, № 3(65), с. 6-17, DOI: 10.52409/20731523_2023_3_6, EDN: ASJURD

Buckling of shallow shells of double curvature considering the presence of discretely introduced weakenings

N.A. Mishurenko¹, A.A. Semenov¹

¹Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering
Saint Petersburg, Russian Federation

Abstract: *Problem statement.* There are frequent cases of constructive weakenings as a part of shell structures. At the same time, considering the effect of weakenings on buckling significantly complicates the method of calculating these structures.

The purpose of this work is to determine the effect of discretely introduced weakenings on the buckling of shallow shells of double curvature.

The objectives of the study are to create a mathematical model that considers geometric nonlinearity, transverse shifts, orthotropy of the material, weakenings of the structure; choice of algorithm for studying the buckling of the shell; writing a program to implement the selected algorithm.

Results. The paper presents a geometrically nonlinear mathematical model of deformation of orthotropic shallow shells of double curvature, weakened by notches. The model is based on the hypothesis of the Timoshenko-Reisner shell theory and is presented as a functional of the total potential strain energy. To find the minimum of the functional, the Ritz method is used, which reduces the problem to solving a system of nonlinear algebraic equations, the solution of which is carried out by the Newton method. The algorithm is implemented in the Maple 2022 software package.

For the structures under consideration, it has been established that when up to 10 % of the structure volume is switched off from work, the decrease in the critical load does not exceed 25 %.

Conclusions. The significance of the obtained results for structural mechanics lies in the fact that a mathematical model has been obtained that considers geometric nonlinearity, transverse shifts, material orthotropy, structural weakenings, the use of which will allow us to investigate the stress-strain state and buckling of shell structures with greater accuracy.

Keywords: shells, weakenings, buckling, critical load, Ritz method, Newton method

For citation: Mishurenko N.A., Semenov A.A. Buckling of shallow shells of double curvature considering the presence of discretely introduced weakening // News KSUAE, 2023, № 3(65), p. 6-17, DOI: 10.52409/20731523_2023_3_6, EDN: ASJURD

1. Введение

Оболочечные конструкции применяются во многих областях промышленности: судостроение, авиастроение, космостроение, строительство. В промышленном строительстве из оболочечных конструкций изготавливают резервуары, газгольдеры, силосы и т.п., в гражданском строительстве оболочки применяются при необходимости устройства больших пролетов (стадионы, оперные театры, аэропорты, торговые центры). Кроме того, оболочечные конструкции применяются в мостостроении, гидротехнике (при возведении морских причальных и оградительных сооружений), при возведении атомных электростанций. При этом следует отметить, что зачастую, по конструктивным соображениям, необходимо устраивать технологические вырезы, которые оказывают влияние на напряженно-деформированное состояние и устойчивость конструкции. В связи с этим возникает необходимость исследования такого рода конструкций.

Существуют различные математические модели ослабленных вырезами оболочек, среди которых следует отметить: метод конструктивной анизотропии и дискретный ввод ослаблений с помощью единичных столбчатых функций [1, 2].

В работе [1] отмечается, что при большом количестве вырезов дискретность их ввода теряется и становится возможным использование метода конструктивной анизотропии.

Влияние ослаблений на нелинейное деформирование и потерю устойчивости с использованием моментной схемы конечных элементов и программных комплексов ЛИРА и SCAD представлено в исследовании [3].

В статье [4] предложена математическая модель деформирования цилиндрических оболочек из композиционных материалов с дефектами, основанная на модели Тимошенко, с использованием метода конечных элементов.

Влияние геометрических несовершенств на устойчивость цилиндрических оболочек при сжатии по результатам лабораторных и вычислительных экспериментов представлено в [5].

В работе [6] представлены математические модели и численные методы для исследования нелинейной деформации и потери устойчивости цилиндрических оболочек с учетом прямоугольных вырезов.

В исследовании [7] представлена методика аналитического расчета цилиндрических оболочек с вырезами, полученная авторами на основании сходимости результатов численного моделирования в ABAQUS и экспериментов.

Изогеометрический анализ с применением разрывного метода Галеркина для перидинамического подхода для моделирования трещин в оболочечных конструкциях представлен в работе [8].

В статье [9] для моделирования трещин в конструкциях предлагается использование «смешанной» модели, сочетающей в себе структурные элементы, представляющие поле перемещений в двумерной срединной поверхности оболочки, с континуальными элементами, описывающими фазовое поле трещин в трехмерном твердом пространстве.

Влияние дефектов и микротрещин на свободные колебания цилиндрических оболочек представлено в работе [10]. Оценка параметров перфорирования цилиндрических оболочек на свободные колебания представлена в [11].

Исследование [12] посвящено влиянию вырезов на величину критической нагрузки с учетом геометрических несовершенств конструкции.

По результатам исследования [13] было установлено, что геометрия вырезов оказывает значительное влияние на критическую нагрузку цилиндрических оболочек: максимальное значение критической нагрузки при устройстве круглых вырезов, минимальное значение критической нагрузки для конструкции с прямоугольными вырезами.

Экспериментальное исследование потери устойчивости и закритического поведения цилиндрических оболочек с перфорацией, подверженных гидростатическому давлению, представлено в работе [14].

В исследовании [15] проведена экспериментальная оценка влияния вырезов на цилиндрические оболочки и эффективности усиления: введение ребер жесткости позволило снизить влияние вырезов на 33 %.

Комплексная оценка влияния усиления стеклопластиком стальных цилиндрических оболочек с учетом ослаблений представлена в исследовании [16].

В работе [17] представлен экспериментальный способ исследования устойчивости цилиндрических оболочек разрывной машиной. При этом было установлено, что экспериментальные значения критической нагрузки ниже теоретических значений, а наибольшее влияние на результаты расчета оказывает точность измерений сечения рассматриваемых оболочек.

Развитие трещин под действием циклической нагрузки в цилиндрической оболочке рассмотрено в [18], кроме того было определено какое влияние оказывают геометрические характеристики конструкции и трещины на время разрушения конструкции.

Исследование [19] посвящено решению задачи о деформировании начально плоской круговой упругопластической оболочки. Авторами сделаны следующие выводы: развитие зон необратимого деформирования зависит от свойств материала; рассматриваемые конструкции не могут испытывать неограниченные деформации; поставленная задача не имеет решения для материала Сен-Венана.

Для решения задач ползучести при больших перемещениях в работе [20] предложено использование упрощенного подхода Лагранжа на примере пологой арки круглого сечения.

В зарубежных научных изысканиях при исследовании влияния ослаблений на НДС конструкции большое внимание акцентировано на цилиндрических оболочках [21–23], исследования закритического поведения цилиндрических оболочек с ослаблениями представлены в [24, 25]. При этом также проводится оценка ослаблений на НДС оболочек других форм, например, конических [26], сферических [27].

Целью данной работы является анализ устойчивости пологих оболочек двойкой кривизны с учетом наличия ослаблений.

Задачами исследования являются: разработка математической модели, одновременно учитывающей геометрическую нелинейность, поперечные сдвиги, ортотропию материала, ослабления конструкции; выбор алгоритма, позволяющего исследовать устойчивость оболочечных конструкций; написание программного кода, предназначенного для реализации подобранного алгоритма.

2. Материалы и методы

Рассматриваются тонкостенные пологие оболочки двойкой кривизны, ослабленные вырезами, находящиеся под действием статической нагрузки. Геометрический вид данных оболочечных конструкций характеризуется параметрами Ляме A, B и радиусами главных кривизн R_1, R_2 вдоль координат x, y соответственно. Подробное описание параметров Ляме было представлено в работе [28]. Для пологих оболочек двойкой кривизны (рис.1) принимается $A = 1, B = 1, R_1 = const, R_2 = const$.

Используется математическая модель Тимошенко-Рейснера, которая учитывает поперечные сдвиги, геометрическую нелинейность, ортотропию. Согласно данной модели неизвестными являются три функции перемещений $U = U(x, y), V = V(x, y), W = W(x, y)$ и две функции, характеризующие углы поворота нормали в плоскостях $xOz, yOz: \Psi_x(x, y), \Psi_y(x, y)$.

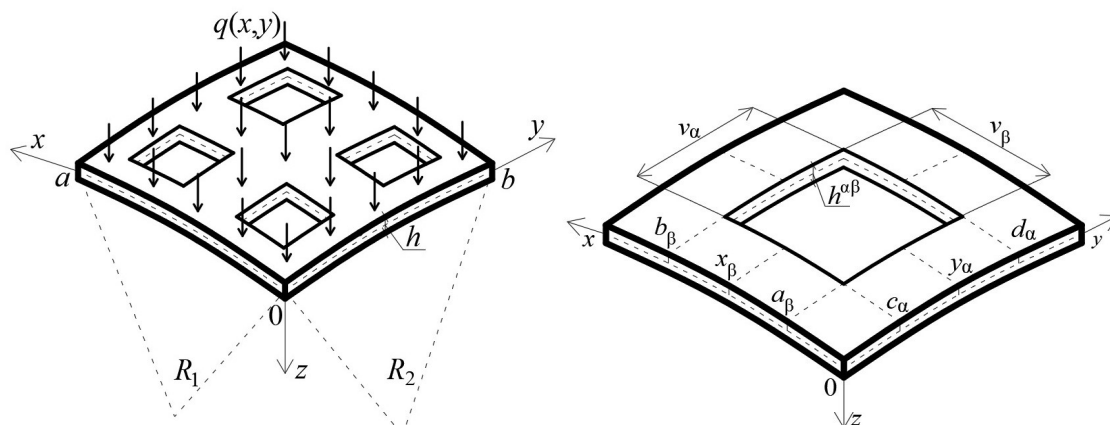


Рис. 1. Пологая оболочка двойкой кривизны (иллюстрация авторов)
 Fig. 1. Shallow shell with double curvature (illustration by the authors)

Основой используемой модели является функционал полной потенциальной энергии деформации, который может быть представлен в следующем виде:

$$E_s = E_s^0 + E_s^V,$$

где E_s^0 – функционал полной потенциальной энергии деформации обшивки оболочки, E_s^V – функционал полной потенциальной энергии деформации зон ослаблений.

Функционал полной потенциальной энергии обшивки оболочки имеет следующий вид:

$$E_s^0 = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \gamma_{xy} + M_x \chi_1 + M_y \chi_2 + (M_{xy} + M_{yx}) \chi_{12} + Q_x (\Psi_x - \theta_1) + Q_y (\Psi_y - \theta_2) - 2P_x U - 2P_y V - 2qW,$$

где q, P_x, P_y – компоненты нагрузки; $k_x = 1/R_1, k_y = 1/R_2$ – главные кривизны оболочки вдоль осей x и y ; N_x, N_y – нормальные усилия в направлении осей x, y ; N_{xy}, N_{yx} – сдвиговые усилия в соответствующей плоскости xOy ; M_x, M_y – изгибающие моменты;

M_{xy}, M_{yx} – крутящие моменты; Q_x, Q_y – поперечные силы в плоскостях xOz и xOy , которые определяются соотношениями (для конструкций без ребер жесткости):

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{E_1 h}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} (\varepsilon_x + \mu_{21} \varepsilon_y), \quad N_y = \frac{E_2 h}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} (\varepsilon_y + \mu_{12} \varepsilon_x), \\ N_{xy} &= N_{yx} = G_{12} h \gamma_{xy}, \\ M_x &= \frac{E_1 h^3}{12(1 - \mu_{12} \mu_{21})} (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2), \quad M_y = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \mu_{12} \mu_{21})} (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1), \\ M_{xy} &= M_{yx} = \frac{G_{12} h^3}{6} \chi_{12}, \\ Q_x &= G_{13} k h (\Psi_x - \theta_1), \quad Q_y = G_{23} k h (\Psi_y - \theta_2). \end{aligned}$$

Здесь E_1, E_2 – модули упругости в направлениях x, y ; $k = 5/6$; G_{12}, G_{13}, G_{23} – модули сдвигов в плоскостях xOy, xOz, yOz соответственно; μ_{12}, μ_{21} – коэффициенты Пуассона; $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ – деформации удлинения; γ_{xy} – деформации сдвига в плоскости xOy ; $\chi_1, \chi_2, \chi_{12}$ – функции изменения кривизн и кручения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{A} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{AB} V \frac{\partial A}{\partial y} - k_x W + \frac{1}{2} \theta_1^2, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{B} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{AB} U \frac{\partial B}{\partial x} - k_y W + \frac{1}{2} \theta_2^2, \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{AB} U \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{1}{AB} V \frac{\partial B}{\partial x} + \theta_1 \theta_2, \\ \theta_1 &= - \left(\frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} + k_x U \right), \quad \theta_2 = - \left(\frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y} + k_y V \right), \\ \chi_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \Psi_y, \quad \chi_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \Psi_x, \\ \chi_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \Psi_y - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \Psi_x \right). \end{aligned}$$

Области расположения ослаблений оболочки задаются функцией [2]:

$$H^V(x, y) = - \sum_{\alpha=1}^o \sum_{\beta=1}^p h^{\alpha\beta} \bar{\delta}(x - x_\beta) \bar{\delta}(y - y_\alpha),$$

где $h^{\alpha\beta}$ – толщина ослабления; индексы α, β указывают номер прямоугольного в плане ослабления, стороны которого параллельны осям x и y ; o, p – количество ослаблений вдоль осей x и y соответственно; $\bar{\delta}(x - x_\beta), \bar{\delta}(y - y_\alpha)$ – единичные столбчатые функции, равные единице в месте наличия ослабления и равные нулю вне таких мест.

Таким образом, толщина всей конструкции равна $h + H^V$.

В работах [1, 2, 29] отмечается, что единичные столбчатые функции одинаково пригодны для учета ослаблений конструкции и подкреплений ребрами. В связи с чем подходы, учитывающие влияние ребер жесткости, будут справедливы для учета влияния ослаблений. Таким образом, геометрические характеристики и функционал полной потенциальной энергии ослаблений определены согласно [29, 30].

Проинтегрировав функцию $H^V(x, y)$ по z в пределах от $\frac{h}{2}$ до $\frac{h}{2} + H^V$ получим жесткостные функции ослаблений:

$$\int_{h/2}^{h/2+H^V} dz = \bar{F}_V = - \sum_{\alpha=1}^o \sum_{\beta=1}^p F_V^{\alpha\beta} \bar{\delta}(x-x_\beta) \bar{\delta}(y-y_\alpha),$$

$$\int_{h/2}^{h/2+H^V} z dz = \bar{S}_V = - \sum_{\alpha=1}^o \sum_{\beta=1}^p S_V^{\alpha\beta} \bar{\delta}(x-x_\beta) \bar{\delta}(y-y_\alpha),$$

$$\int_{h/2}^{h/2+H^V} z^2 dz = \bar{J}_V = - \sum_{\alpha=1}^o \sum_{\beta=1}^p J_V^{\alpha\beta} \bar{\delta}(x-x_\beta) \bar{\delta}(y-y_\alpha),$$

где $\bar{F}_V, \bar{S}_V, \bar{J}_V$ – функции, характеризующие площадь, статический момент и момент инерции ослабления:

$$F_V^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta}, \quad S_V^{\alpha\beta} = \frac{h^{\alpha\beta}(h+h^{\alpha\beta})}{2},$$

$$J_V^{\alpha\beta} = 0,25h^2 h^{\alpha\beta} + 0,5h(h^{\alpha\beta})^2 + \frac{1}{3}(h^{\alpha\beta})^3.$$

Функционал полной потенциальной энергии ослаблений имеет вид:

$$E_s^V = - \sum_{\alpha=1}^o \sum_{\beta=1}^p \int_{a_\beta}^{b_\beta} \int_{c_\alpha}^{d_\alpha} B_{\alpha\beta} dx dy,$$

где:

$$B_{\alpha\beta} = [G_1 (F_V^{\alpha\beta} \hat{\varepsilon}_x \varepsilon_x + S_V^{\alpha\beta} \hat{\chi}_1 \varepsilon_x) v_a + G_2 (F_V^{\alpha\beta} \hat{\varepsilon}_y \varepsilon_y + S_V^{\alpha\beta} \hat{\chi}_2 \varepsilon_y) v_b +$$

$$+ G_{12} (F_V^{\alpha\beta} \gamma_{xy}^2 + 2S_V^{\alpha\beta} \chi_{12} \gamma_{xy}) v_{ab} + G_1 (S_V^{\alpha\beta} \hat{\varepsilon}_x \chi_1 + J_V^{\alpha\beta} \hat{\chi}_1 \chi_1) v_a +$$

$$+ G_2 (S_V^{\alpha\beta} \hat{\varepsilon}_y \chi_2 + J_V^{\alpha\beta} \hat{\chi}_2 \chi_2) v_b + 2G_{12} (S_V^{\alpha\beta} \gamma_{xy} \chi_{12} + 2J_V^{\alpha\beta} \chi_{12}^2) v_{ab} +$$

$$+ \tilde{\Psi}_x F_V^{\alpha\beta} v_a + \tilde{\Psi}_y F_V^{\alpha\beta} v_b] AB,$$

где:

$$\hat{\varepsilon}_x = (\varepsilon_x + \mu_{21} \varepsilon_y), \quad \hat{\varepsilon}_y = (\varepsilon_y + \mu_{12} \varepsilon_x), \quad \hat{\chi}_1 = (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2), \quad \hat{\chi}_2 = (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1),$$

$$\tilde{\Psi}_x = G_{13} k (\Psi_x - \theta_1)^2, \quad \tilde{\Psi}_y = G_{23} k (\Psi_y - \theta_2)^2,$$

$$v_a = \frac{v_\beta}{aA}, \quad v_b = \frac{v_\alpha}{bB}, \quad v_{ab} = \frac{v_a + v_b}{2},$$

где v_α, v_β – ширина ослаблений в направлениях x, y соответственно.

Для исследования устойчивости оболочечной конструкции требуется найти минимум функционала (1). Используем метод Ритца для сведения вариационной задачи о поиске минимума функционала к решению системы нелинейных алгебраических выражений. Неизвестные функции представим в виде

$$U = U(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} U_{kl} X_1^k Y_1^l, \quad V = V(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} V_{kl} X_2^k Y_2^l,$$

$$W = W(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} W_{kl} X_3^k Y_3^l, \quad \Psi_x = \Psi_x(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} \Psi_{xkl} X_4^k Y_4^l,$$

$$\Psi_y = \Psi_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} \Psi_{ykl} X_5^k Y_5^l,$$

где $U_{kl}, V_{kl}, W_{kl}, \Psi_{xkl}, \Psi_{ykl}$ – неизвестные числовые параметры; X_1^k, \dots, X_5^k и Y_1^k, \dots, Y_5^k – известные аппроксимирующие функции, которые удовлетворяют краевым условиям. Краевые условия назначаются исходя из способа закрепления контура конструкции.

Рассматриваются тонкостенные пологие оболочки двоякой кривизны, шарнирно-неподвижно закрепленные по контуру (при $x = a_1 = 0, x = a: U = V = W = M_x = \Psi_y = 0$; при $y = 0, y = b: U = V = W = M_y = \Psi_x = 0$). В данном случае в качестве

аппроксимирующих функций можно использовать следующие тригонометрические функции:

$$\begin{aligned} X_1^k &= \sin\left(2k\pi\frac{x-a_1}{a-a_1}\right), Y_1^l = \sin\left((2l-1)\pi\frac{y}{b}\right), \\ X_2^k &= \sin\left((2k-1)\pi\frac{x-a_1}{a-a_1}\right), Y_2^l = \sin\left(2l\pi\frac{y}{b}\right), \\ X_3^k &= \sin\left((2k-1)\pi\frac{x-a_1}{a-a_1}\right), Y_3^l = \sin\left((2l-1)\pi\frac{y}{b}\right), \\ X_4^k &= \cos\left((2k-1)\pi\frac{x-a_1}{a-a_1}\right), Y_4^l = \sin\left((2l-1)\pi\frac{y}{b}\right), \\ X_5^k &= \sin\left((2k-1)\pi\frac{x-a_1}{a-a_1}\right), Y_5^l = \cos\left((2l-1)\pi\frac{y}{b}\right). \end{aligned}$$

После подстановки (12) в (1) находятся производные по неизвестным числовым параметрам и приравниваются к нулю. Таким образом, получена система нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ). Решение данной системы осуществляется методом Ньютона.

Реализация данного алгоритма осуществлена в математическом пакете Maple. В работе [1] авторами была представлена сходимость численного решения, основанного на применении метода Рунге и метода Ньютона.

3. Результаты и обсуждение

Проведены расчеты трех вариантов пологих оболочек двойкой кривизны, геометрические параметры оболочек представлены в табл. 1. Закрепление контура – шарнирно-неподвижное, нагрузка – статическая. Материал – сталь ($\mu_{12} = \mu_{21} = \mu = 0,3$, $E_1 = E_2 = E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа).

Таблица 1

Варианты рассматриваемых пологих оболочек двойкой кривизны

№	h , м	a , м	b , м	R_1 , м	R_2 , м
1	0,09	54	54	135,9	135,9
2	0,09	18	18	45,27	45,27
3	0,09	10,8	10,8	40,05	40,05

Ширина и высота ослаблений $v_a = 0,1a$, $v_b = 0,1b$, $h^{ab} = h$. Количество ослаблений в обоих направлениях принято одинаковым.

В табл. 2 представлены параметры оболочек в зависимости от числа ослаблений. Здесь S^0, V^0 – площадь и объем обшивки соответственно, S^V, V^V – площадь и объем ослаблений оболочки соответственно.

Таблица 2

Параметры оболочек в зависимости от числа ослаблений

Вар.	Параметр							
	S^0 , м ²	V^0 , м ³	$v_a = 0,1a$, м	$v_b = 0,1b$, м	$h^{ab} = h$, м			
1	2916	262,44	5,4	5,4	0,09			
	$o \times p$	1×1	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7
	S^V , м ²	29,16	116,64	262,4	466,56	729	1049,76	1428,84
	V^V , м ³	2,624	10,498	23,62	41,99	65,61	94,48	128,6
	V^V/V^0	0,01	0,04	0,09	0,16	0,25	0,36	0,49
	2	S^0 , м ²	V^0 , м ³	$v_a = 0,1a$, м	$v_b = 0,1b$, м	$h^{ab} = h$, м		
324		29,16	1,8	1,8	0,09			
$o \times p$		1×1	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7
S^V , м ²		3,24	12,96	29,16	51,84	81	116,64	158,76

Окончание таблицы 2

	$V^V, \text{м}^3$	0,292	1,166	2,624	4,666	7,29	10,5	14,29
	V^V/V^0	0,01	0,04	0,09	0,16	0,25	0,36	0,49
3	$S^0, \text{м}^2$	$V^0, \text{м}^3$	$v_a = 0,1a, \text{м}$	$v_b = 0,1b, \text{м}$	$h^{a\beta} = h, \text{м}$			
	116,64	10,498	1	1	0,09			
	$o \times p$	1×1	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7
	$S^V, \text{м}^2$	1	4	9	16	25	36	49
	$V^V, \text{м}^3$	0,09	0,36	0,81	1,44	2,25	3,24	4,41
	V^V/V^0	0,009	0,034	0,077	0,137	0,214	0,31	0,42

Значения критических нагрузок потери устойчивости оболочек q_{cr} при разном количестве ослаблений и при разном количестве членов разложения аппроксимирующих функций N представлены в табл. 3.

Таблица 3

Критические нагрузки для пологих оболочек двойкой кривизны с ослаблениями

№	N	Критическая нагрузка потери устойчивости $q_{cr}, \text{МПа}$								
		$o \times p$	0×0	1×1	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7
1	9	q_{cr}	0,09	0,09	0,09	0,09	0,08	0,07	0,07	0,06
	16	q_{cr}	0,07	0,07	0,07	0,06	0,06	0,05	0,02	0,012
2	9	q_{cr}	0,64	0,64	0,64	0,59	0,48	0,22	0,28	0,13
	16	q_{cr}	0,59	0,59	0,54	0,49	0,39	0,21	0,14	0,12
3	9	q_{cr}	0,79	0,78	0,71	0,62	0,59	0,3	0,4	0,08
	16	q_{cr}	0,78	0,78	0,66	0,6	0,53	0,24	0,45	0,08

На рис. 2 полученные значения нагрузок потери устойчивости q_{cr} представлены графически.

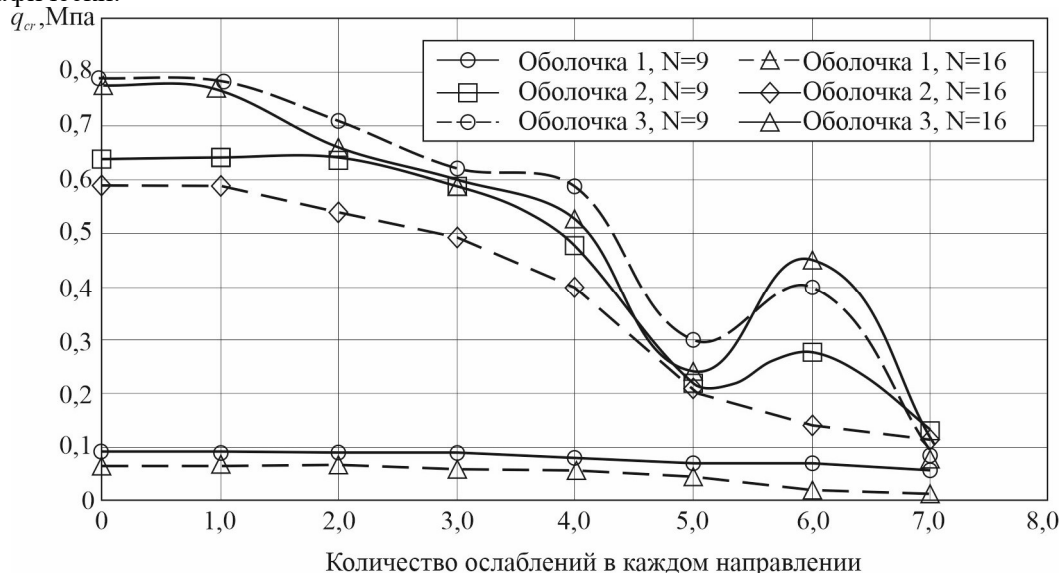


Рис. 2. Значения критических нагрузок при разном количестве ослаблений (иллюстрация авторов)

Fig. 2. Critical load values for different number of attenuations (illustration by the authors)

На рис. 3 и 4 показаны графики зависимости прогиба W от нагрузки q при разном количестве ослаблений для оболочек вариантов 2 и 3 соответственно. На рис. 3 и 4 кривые W_c – прогиб в центре конструкции ($x = a/2, y = b/2$); кривые W_4 – прогиб в четвертой части конструкции ($x = a/4, y = b/4$).

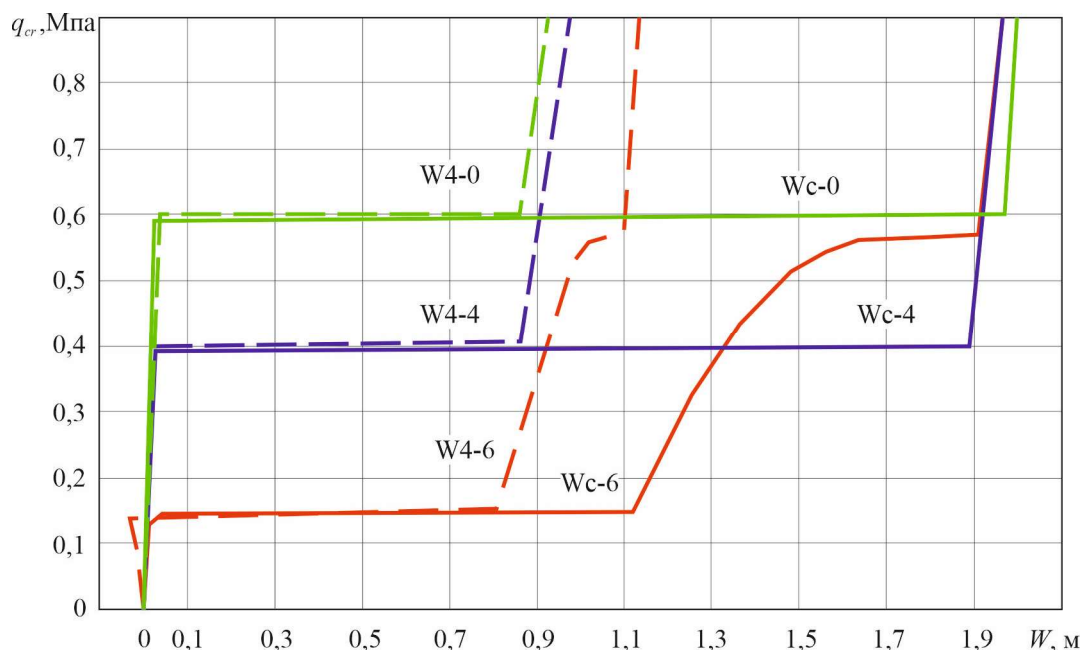


Рис. 3.График зависимости прогиба от нагрузки при разном количестве ослаблений для оболочки вариант 2

(иллюстрация авторов)

Fig. 3.Graph of deflection versus load for different number of weakening for shell option 2

(illustration by the authors)

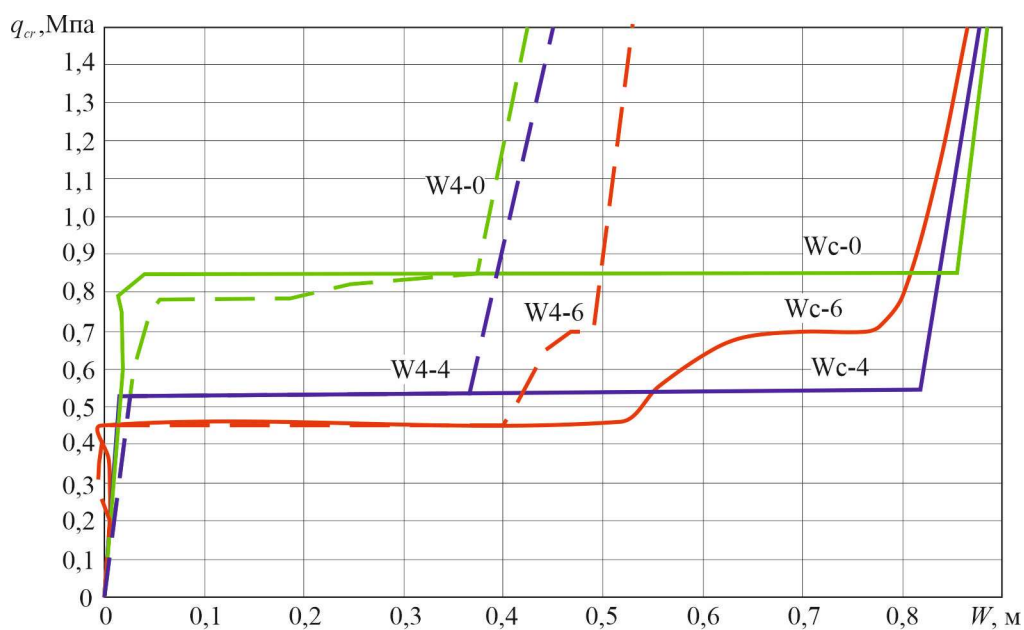


Рис. 4.График зависимости прогиба от нагрузки при разном количестве ослаблений для оболочки вариант 3

(иллюстрация авторов)

Fig. 4.Graph of deflection versus load for different number of weakening for shell option 3

(illustration by the authors)

Верификация методики расчета оболочечных конструкций, путем сравнения с другими методиками и результатами экспериментов, проведена ранее в работе [30].

Из полученных данных можно сделать вывод, что учет ослаблений конструкции приводит к снижению критической нагрузки. Причем при количестве ослаблений 6×6 для рассматриваемых вариантов происходит несколько потерь устойчивости, после чего значение прогиба начинает монотонно возрастать. На основании чего можно сделать следующий вывод: для рассматриваемых конструкций установлено, что при выключении

из работы до 10 % объема конструкции, снижение критической нагрузки не превышает 25 %.

4. Заключение

Таким образом, было проведено исследование устойчивости пологих оболочек двоякой кривизны с учетом ослаблений, по результатам которого:

- Предложена математическая модель, учитывающая геометрическую нелинейность, поперечные сдвиги, ортотропию материала, ослабления конструкции в виде функционала полной потенциальной энергии деформации оболочки.
- Для исследования устойчивости рассматриваемых оболочек решается задача нахождения минимума функционала методом Рунге. Что позволяет свести задачу к решению СНАУ. Решение СНАУ осуществляется методом Ньютона.
- Математическая модель и алгоритм реализованы в программном комплексе Maple 2022.

Статья публикуется по результатам проведения научно-исследовательской работы, проводимой в рамках конкурса грантов на выполнение научно-исследовательских работ научно-педагогическими работниками СПбГАСУ в 2023 году.

Список литературы/References

1. Каменев И.В., Семенов А.А. Обоснование использования метода конструктивной анизотропии при расчете пологих оболочек двоякой кривизны, ослабленных вырезами // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2016. Вып. 2. С. 54–68. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.2.05.[Kamenev I.V., Semenov A.A. Rationale of the use of the constructive anisotropy method in the calculation of shallow shells of double curvature, weakened holes. PNRPU Mechanics Bulletin. 2016. No. 2. P. 54–68. DOI: 10.15593/ perm.mech/2016.2.05]
2. Карпов В.В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения. В 2 ч. Ч. 1. Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 288 с.[Karpov V.V. Strength and stability of reinforced shells of rotation. In 2 parts. Part 1. Models and algorithms for studying the strength and stability of reinforced shells of revolution. M.: FIZMATLIT, 2010. 288 p.]
3. Соловей Н.А., Кривенко О.П., Малыгина О.А. Конечноэлементные модели исследования нелинейного деформирования оболочек ступенчато-переменной толщины с отверстиями, каналами и выемками // Инженерно-строительный журнал. 2015. Вып. 1 (53). С. 56–69. DOI: 10.5862/MCE.53.6.[Solovei N.A., Krivenko O.P., Malygina O.A. Finite element models for the analysis of nonlinear deformation of shells stepwise-variable thickness with holes, channels and cavities // Magazine of Civil Engineering, No.1, 2015, P.56-69, doi: 10.5862/MCE.53.6]
4. Захарова Ю.В., Лохматова Л.Г. Моделирование напряженно-деформированного состояния композиционных оболочек с дефектами // Инженерный журнал: наука и инновации. 2016. Вып. 11 (59). DOI: 10.18698/2308-6033-2016-11-1552.[Zakharova Yu.V., Lohmatova L.G. Modeling of the crisis-deformed state of composite shells with defects // Engineering journal: science and innovation. 2016. Issue. 11 (59). DOI: 10.18698/2308-6033-2016-11-1552.]
5. Zhao C. et al. Buckling behavior of a thin-walled cylinder shell with the cutout imperfections // Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2019. Vol. 26. Iss. 18. P. 1536–1542. DOI: 10.1080/15376494.2018.1444225.
6. Dmitriev V.G. et al. Investigation of Buckling Behavior for Thin-Walled Bearing Aircraft Structural Elements with Cutouts by Means of Numerical Simulation // Russian Aeronautics. 2018. Vol. 61. Iss. 2. P. 165–174. DOI: 10.3103/S1068799818020034.
7. Yılmaz H., Kocabaş İ., Özyurt E. Empirical equations to estimate non-linear collapse of medium-length cylindrical shells with circular cutouts // Thin-Walled Structures. 2017. Vol. 119. P. 868–878. DOI: 10.1016/j.tws.2017.08.008.

8. Xia Y. et al. Discontinuous Galerkin isogeometric analysis with peridynamic model for crack simulation of shell structure // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2022. Vol. 398. P. 115193. DOI: 10.1016/j.cma.2022.115193.
9. Ambati M. et al. Phase-field modeling of brittle fracture along the thickness direction of plates and shells // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2022. Vol. 123. Iss. 17. P. 4094–4118. DOI: 10.1002/nme.7001.
10. Wang Y. et al. Adaptive mesh refinement for finite element analysis of the free vibration disturbance of cylindrical shells due to circumferential micro-crack damage // *Engineering Computations*. 2022. Vol. 39. Iss. 9. P. 3271–3295. DOI: 10.1108/EC-09-2021-0555.
11. Giani S., Hakula H. Free vibration of perforated cylindrical shells of revolution: Asymptotics and effective material parameters // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2023. Vol. 403. P. 115700. DOI: 10.1016/j.cma.2022.115700.
12. Arbelo M.A. et al. Investigation of Buckling Behavior of Composite Shell Structures with Cutouts // *Applied Composite Materials*. 2015. Vol. 22. Iss. 6. P. 623–636. DOI: 10.1007/s10443-014-9428-x.
13. Gangadhar L., Kumar T.S. Finite Element Buckling Analysis of Composite Cylindrical Shell with Cutouts Subjected to Axial Compression // *International Journal of Advanced Science and Technology*. 2016. Vol. 89. P. 45–52. DOI: 10.14257/ijast.2016.89.06.
14. Shen K.-C. et al. Buckling and Post-Buckling Behavior of Perfect/Perforated Composite Cylindrical Shells under Hydrostatic Pressure // *Journal of Marine Science and Engineering*. 2022. Vol. 10. Iss. 2. P. 278. DOI: 10.3390/jmse10020278.
15. Ghanbari Ghazijahani T., Jiao H., Holloway D. Structural behavior of shells with different cutouts under compression: An experimental study // *Journal of Constructional Steel Research*. 2015. Vol. 105. P. 129–137. DOI: 10.1016/j.jcsr.2014.10.020.
16. Krishna G.V., Narayanamurthy V., Viswanath C. Buckling behaviour of FRP strengthened cylindrical metallic shells with cut-outs // *Composite Structures*. 2022. Vol. 300. P. 116176. DOI: 10.1016/j.compstruct.2022.116176.
17. Туманова Е.Ю. и др. Определение критической осевой сжимающей нагрузки для тонкостенных цилиндрических оболочек на разрывной машине // *Нефтегазовое дело*. 2022. Т. 20. Вып. 6. С. 145–154. DOI: 10.17122/ngdelo-2022-6-145-154. [Tumanova E.Yu., Kovshova Yu.S., Baigildin R.A., Kayumov R.A. Opredelenie kriticheskoy osevoj szhimayushchej nagruzki dlya tonkostennyh cilindricheskikh obolochek na razryvnoj mashine [Determination of the critical axial compressive load for thin-walled cylindrical shells on a breaking machine]]// *Neftegazovoe delo — Petroleum Engineering*, 2022, Vol. 20, No. 6. P. 145- 154. [in Russian]. [https://doi.org/10.17122/ngdelo-2022-6-145-154.](https://doi.org/10.17122/ngdelo-2022-6-145-154)]
18. Каюмов Р.А., Тазюков Б.Ф. Расчет цилиндрической оболочки на циклическую прочность // *Вестник Казанского технологического университета*. 2012. Т. 15. Вып. 9. С. 162–164. [Kayumov R.A., Tazyukov B.F. Calculation of a cylindrical shell for cyclic strength // *Bulletin of the Kazan Technological University*. 2012. Т. 15. Issue. 9. P. 162–164.]
19. Кудряшов А.В. и др. Существование решения задачи о конечном деформировании круговой упругопластической оболочки // *Вестник Технологического университета*. 2015. Т. 18. Вып. 3. С. 251–253. [Kudryashov A.V. and others. Existence of a solution to the problem of finite deformation of a circular elastoplastic shell // *Bulletin of the Technological University*. 2015. Т. 18. Issue. 3. P. 251–253.]
20. Kayumov R.A., Shakirzyanov F.R. Large Deflections and Stability of Low-Angle Arches and Panels During Creep Flow // *Advanced Structured Materials*. 2021. Vol. 141. P. 237–248. DOI: 10.1007/978-3-030-54928-2_18.
21. Li Q., Wang D.F. Influence of cutout position on buckling of large-scale thin-walled cylindrical shell of desulphurizing tower with welding induced imperfection under wind loading // *Applied Mechanics and Materials*. 2014. Vol. 687–691. P. 68–72. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.687-691.68.

22. Labans E. et al. Bending of Composite Cylindrical Shells with Circular Cutouts: Experimental Validation // *Journal of Aircraft*. 2019. Vol. 56. Iss. 4. P. 1534–1550. DOI: 10.2514/1.C035247.
23. Gokyer Y., Sonmez F.O. Topology optimization of cylindrical shells with cutouts for maximum buckling strength // *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. 2023. Vol. 45. Iss. 1. P. 13. DOI: 10.1007/s40430-022-03941-w.
24. Groh R.M.J., Wu K.C. Nonlinear Buckling and Postbuckling Analysis of Tow-Steered Composite Cylinders with Cutouts // *AIAA Journal*. 2022. Vol. 60. Iss. 9. P. 5533–5546. DOI: 10.2514/1.J061755.
25. Shahani A.R., Kiarasi F. Numerical and Experimental Investigation on Post-buckling Behavior of Stiffened Cylindrical Shells with Cutout subject to Uniform Axial Compression // *Journal of Applied and Computational Mechanics*. 2023. Vol. 9(1). P. 25–44. DOI: 10.22055/jacm.2021.33649.2261.
26. Li Z., Cao Y., Pan G. Influence of geometric imperfections on the axially loaded composite conical shells with and without cutout // *AIP Advances*. 2020. Vol. 10. Iss. 9. P. 095106. DOI: 10.1063/5.0021103.
27. Kumar Chaubey A., Kumar A., Chakrabarti A. Effect of multiple cutouts on shear buckling of laminated composite spherical shells // *Materials Today: Proceedings*. 2020. Vol. 21. P. 1155–1163. DOI: 10.1016/j.matpr.2020.01.065.
28. Semenov A. Mathematical Modeling in Shell Structure Analysis Tasks // *International Journal for Engineering Modelling*. 2022. Vol. 35. Iss. 1. P. 43–55. DOI: 10.31534/engmod.2022.1.ri.03m.
29. Karpov V.V. Models of the shells having ribs, reinforcement plates and cutouts // *International Journal of Solids and Structures*. 2018. Vol. 146. P. 117–135. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.03.024.
30. Karpov V.V., Semenov A.A. Refined model of stiffened shells // *International Journal of Solids and Structures*. 2020. Vol. 199. P. 43–56. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2020.03.019.

Информация об авторах

Мишуренко Николай Александрович, аспирант, Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация.

Email: nikolai8421@mail.ru

Семенов Алексей Александрович, кандидат технических наук, доцент, Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация.

Email: sw.semenov@gmail.com

Information about the authors

Nikolai A. Mishurenko, post-graduate student, Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, Saint Petersburg, Russian Federation

Email: nikolai8421@mail.ru

Alexey A. Semenov, candidate of technical sciences, associate professor, Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, Saint Petersburg, Russian Federation

Email: sw.semenov@gmail.com