



УДК 532.5:621.694

Вачагина Е.К. – доктор технических наук

E-mail: vachagina@mail.ru

Казанский Научный Центр Российской Академии Наук

Адрес организации: 420111, Россия, г. Казань, ул. Лобачевского, д. 2/3

Золотонос Я.Д. – доктор технических наук, профессор

E-mail: zolotonosov@mail.ru

Мустакимова С.А. – ведущий программист

E-mail: mustakim@kgasu.ru

Крутова И.А. – аспирант

E-mail: iraida_knyazeva@mail.ru

Казанский государственный архитектурно-строительный университет

Адрес организации: 420043, Россия, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1

Определение эквивалентного диаметра пружинно-витых труб

Аннотация

Представлены методика расчета площади живого сечения, смоченного периметра и эквивалентного диаметра цилиндрического пружинно-витого канала. Уравнение границы канала представлялось в параметрическом виде. Вычисление эквивалентного диаметра с помощью предложенной методики позволяет производить инженерные расчеты серии теплообменных аппаратов в которых в качестве теплообменных элементов используются пружинно-витые каналы.

Ключевые слова: теплообмен, гидродинамика, пружинно-витые каналы, ковариантные и контрвариантные компоненты скорости, линии тока, вторичные течения.

В литературе для определения основных гидравлических характеристик каналов используется параметр, известный в литературе как эквивалентный диаметр [1]. Так для круглых труб эквивалентный диаметр равен обычному диаметру, для кольцевого канала – разности диаметров. Представляет научный и практический интерес определение эквивалентного диаметра пружинно-винтового канала в целях их широкого внедрения в инженерную практику [2-7].

Границы пружинно-витых каналов образованы плотно примыкающими друг к другу свернутыми по спирали витками проволоки [6, 7].

Параметрическое уравнение одного витка центральной винтовой линии – оси проволоки имеет вид [8]:

$$\mathbf{r}(u) = (D/2)(\mathbf{e}(u) + w\mathbf{u}k), 0 \leq u \leq 2\pi,$$

или в координатном виде:

$$\begin{cases} x = (D/2) \cos u, \\ y = (D/2) \sin u, \\ z = (D/2) wu, \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 2\pi$$

где u – параметр; $D/2$ – расстояние от центральной винтовой линии – оси проволоки до центра трубы; $w = S/(\pi D)$ – геометрический параметр; S – расстояние между двумя витками проволоки.

Центральная винтовая линия оси проволоки характеризуется следующими векторами сопровождающего репера:

$$\mathbf{t}(u) = \frac{\mathbf{g}(u) + wk}{\sqrt{w^2 + 1}}; \quad \mathbf{b}(u) = \frac{-w\mathbf{g}(u) + k}{\sqrt{w^2 + 1}}; \quad \mathbf{v}(u) = -\mathbf{e}(u),$$

где $\mathbf{e}(u) = \cos u \mathbf{i} + \sin u \mathbf{j}$, $\mathbf{g}(u) = -\sin u \mathbf{i} + \cos u \mathbf{j}$ – круговые векторные функции скалярного аргумента u ; $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – орты декартовой системы координат.

Параметрическое уравнение поверхности свернутой по спирали проволоки диаметром d может быть представлено в виде:

$$\mathbf{r}(u, v) = (D/2)(\mathbf{e}(u) + wuk) + (d/2)(\mathbf{v}(u) \cos v + \mathbf{b}(u) \sin v),$$

или в координатном виде:

$$\begin{cases} x = \frac{D}{2} \left(\cos u + k \left(-\cos v \cos u + \sin v \frac{w \sin u}{\sqrt{w^2 + 1}} \right) \right), \\ y = \frac{D}{2} \left(\sin u + k \left(-\cos v \sin u + \sin v \frac{-w \cos u}{\sqrt{w^2 + 1}} \right) \right), \\ z = \frac{D}{2} \left(wu + k \frac{\sin v}{\sqrt{w^2 + 1}} \right) \end{cases} \quad (1)$$

где u, v – параметры поверхности; $k = d / D$.

Полагая $z=0$ в третьем соотношении (1) выразим из него u :

$$u = -k \frac{\sin v}{w\sqrt{w^2 + 1}}. \quad (2)$$

Подставляя соотношение (2) в первые два уравнения системы уравнений (1) получим параметрическое уравнение границы канала в плоскости $z=0$:

$$\begin{cases} x = \frac{D}{2} \left((1 - k \cos v) \cos \left(\frac{k \sin v}{w\sqrt{w^2 + 1}} \right) - \frac{k w}{\sqrt{w^2 + 1}} \sin v \sin \left(\frac{k \sin v}{w\sqrt{w^2 + 1}} \right) \right) \\ y = \frac{D}{2} \left((1 - k \cos v) \sin \left(\frac{k \sin v}{w\sqrt{w^2 + 1}} \right) + \frac{k w}{\sqrt{w^2 + 1}} \sin v \cos \left(\frac{k \sin v}{w\sqrt{w^2 + 1}} \right) \right) \end{cases} \quad -p \leq v \leq p \quad (3)$$

Условие плотного прилегания витков проволоки друг к другу можно представить в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} y(v_0) = \frac{D}{2} \left((1 - k \cos v_0) \sin \left(\frac{k \sin v_0}{w\sqrt{w^2 + 1}} \right) + \frac{k w}{\sqrt{w^2 + 1}} \sin v_0 \cos \left(\frac{k \sin v_0}{w\sqrt{w^2 + 1}} \right) \right) = 0, \\ \frac{dy}{dv}(v_0) = \frac{D k (w^2 + 1 - k \cos v_0)}{2 w (w^2 + 1)} \left(\sqrt{w^2 + 1} \cos v_0 \cos \left(\frac{k \sin v_0}{w\sqrt{w^2 + 1}} \right) + \right. \\ \left. + w \sin v_0 \sin \left(\frac{k \sin v_0}{w\sqrt{w^2 + 1}} \right) \right) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где $\pm v_0$ – значение параметра, при котором витки плотно прилегают друг к другу. Смысл первого уравнения состоит в том, что витки проволоки плотно примыкают друг к другу в точке с координатой $y=0$. Смысл второго уравнения состоит в том, что в точке $y=0$ функция $y(v)$ принимает экстремальное минимальное значение, что соответствует условию $dy/dv=0$.

Система (4) с помощью некоторых преобразований может быть приведена к виду:

$$\begin{cases} k \cos v_0 = \sin^2 \left(\frac{k \sin v_0}{w\sqrt{w^2 + 1}} \right), \\ k \cos^2 v_0 - (w^2 + 1) \cos v_0 + k w^2 = 0, \end{cases} \quad (5)$$

Второе уравнение системы (5) является квадратным уравнением относительно $\cos v_0$. Допустимое решение этого уравнения запишется как:

$$\cos v_0 = \frac{(w^2 + 1) - \sqrt{(w^2 + 1)^2 - 4k^2 w^2}}{2k}, \quad (6)$$

при этом для $\sin v_0$ имеем следующее выражение:

$$\sin v_0 = \sqrt{1 - \left[\frac{(w^2 + 1) \pm \sqrt{(w^2 + 1)^2 - 4k^2 w^2}}{2k} \right]^2}.$$

Тогда первое уравнение системы (5):

$$k \cos v_0 = \sin^2 \left(\frac{k \sin v_0}{w \sqrt{w^2 + 1}} \right),$$

совместно с полученными выражениями для $\cos v_0$ и $\sin v_0$ можно рассматривать как нелинейное уравнение относительно w . Решая это уравнение с помощью численных методов [9], например, с помощью метода деления отрезка пополам, получим зависимость $w_0 = w_0(\kappa)$, которая определяет конкретное значение геометрического параметра w_0 (значение шага винтовой спирали) в зависимости от параметра κ при плотном примыкании витков проволоки друг к другу. При известном значении w_0 значение v_0 получим из (6) с помощью формулы:

$$v_0 = \text{Arccos} \frac{(w_0^2 + 1) - \sqrt{(w_0^2 + 1)^2 - 4k^2 w_0^2}}{2k},$$

так как из формул очевидно следует, что это значение удовлетворяет неравенству $0 < v_0 < \pi/2$.

На рис. представлены поперечные сечения пружинно-витого канала.

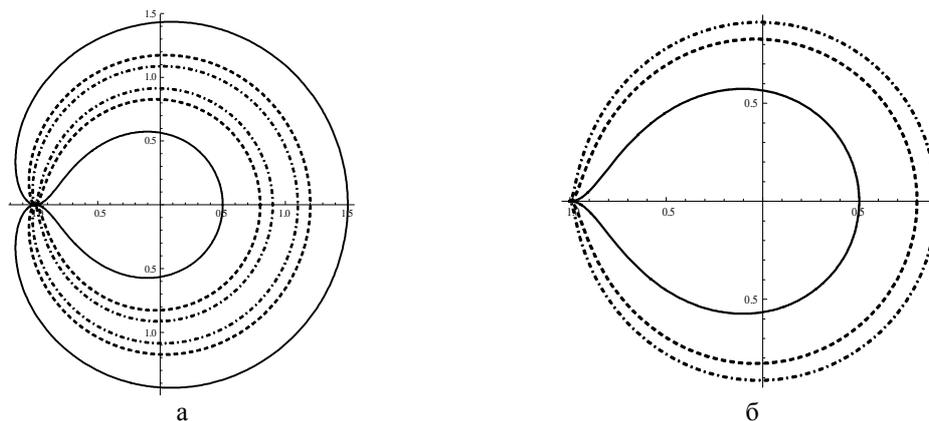


Рис. Поперечное сечение пружинно-витых труб:

$\kappa=1/2$ – сплошная линия; $\kappa=1/5$ – штриховая линия; $\kappa=1/10$ штрих-пунктирная линия;
а – поперечное сечение проволоки; б – поперечное сечение проточной части канала

Для определения площади поперечного сечения используется стандартная формула в полярной системе координат [10]:

$$F = \int_{-p}^p dj \int_0^{r(j)} r dr = \frac{1}{2} \int_{-p}^p r^2(j) dj.$$

Учитывая, что уравнение границы задано в параметрическом виде (3) преобразуем предыдущую формулу к виду:

$$F = \frac{1}{2} \int_{-v_0}^{v_0} r^2(v) \frac{dj}{dv} dv. \quad (7)$$

Для получения $d\varphi/dv$ воспользуемся формулами перехода от декартовой к полярной системе координат:

$$\begin{cases} x = r \cos j \\ y = r \sin j \end{cases}.$$

Дифференцируя эти соотношения по параметру v выразим из полученных соотношений:

$$\frac{dj}{dv} \frac{dj}{dv} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{dy}{dv} x - \frac{dx}{dv} y \right). \tag{8}$$

Производные $\frac{dx}{dv}$, $\frac{dy}{dv}$ определим дифференцируя по v параметрическое уравнение границы (3):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dv} = -\frac{D k (k \cos v - 1 - w^2)}{2 w (1 + w^2)} \left(-w \cos \left(\frac{k \sin v}{w \sqrt{w^2 + 1}} \right) \sin v + \right. \\ \left. + \sqrt{1 + w^2} \sin \left(\frac{k \sin v}{w \sqrt{w^2 + 1}} \right) \cos v \right) \\ \frac{dy}{dv} = -\frac{D k (k \cos v - 1 - w^2)}{2 w (1 + w^2)} \left(\sqrt{1 + w^2} \cos \left(\frac{k \sin v}{w \sqrt{w^2 + 1}} \right) \cos v + \right. \\ \left. + w \sin \left(\frac{k \sin v}{\sqrt{1 + w^2}} \right) \sin v \right) \end{cases} \tag{9}$$

Подставляя (9) в (8) и в (7) окончательно получим:

$$F = \frac{1}{2} \left(\frac{D}{2} \right)^2 \int_{-v_0}^{v_0} \left(x \frac{dy}{dv} - y \frac{dx}{dv} \right) dv,$$

где подынтегральное выражение имеет вид:

$$\left(x \frac{dy}{dv} - y \frac{dx}{dv} \right) = \frac{k \left(\left(4 + 4w_0^4 + 3k^2 + 4w_0^2 (2 + k^2) \right) \cos v + k \left(-4(1 + w_0^2)^2 - 4(1 + w_0^2) \cos 2v + k \cos 3v \right) \right)}{4w_0 \left(1 + w_0^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

и

получено подстановкой выражений для x и y из (3), выражений $\frac{dx}{dv}$ и $\frac{dy}{dv}$ – из формул (9).

Точное значение площади поперечного сечения канала может быть только численно, так как только численно могут быть определены пределы интегрирования. Однако, как показали расчеты значение v_0 мало отличается от $\pi/2$. Заменяя пределы интегрирования на $\pi/2$, принимая $S/d \approx 1$ и $w_0 \approx \kappa/\pi$, можно получить приближенное значение площади F :

$$F \approx \left(\frac{D}{2} \right)^2 \frac{-3p^5 k - 6p^3 k^3 + 6pk^4 - 3pk^5 + 6p^2 k^2 (2 + k^2) + p^4 (6 + 4k^2)}{12(p^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Смоченный периметр P может быть вычислен как длина параметрически заданной кривой по формуле[1]:

$$P = \left(\frac{D}{2} \right) \int_{-v_0}^{v_0} \sqrt{\left(\frac{dx}{dv} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dv} \right)^2} dv.$$

Подставляя выражения из (9) в формулу для периметра, получим:

$$P = \left(\frac{D}{2} \right) \int_{-v_0}^{v_0} \frac{k \left(1 + w_0^2 - k \cos v \right)}{w_0 \left(1 + w_0^2 \right)} \sqrt{1 + 2w_0^2 + \cos(2v)} dv.$$

Этот интеграл также определяется только численно.

Для определения приближенного значения смоченного периметра при тех же допущениях, что и при вычислении площади живого сечения можно использовать формулу:

$$P \approx \left(\frac{D}{2}\right) \frac{\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} p \left(1 + \left(\frac{k}{p}\right)^2 - k \cos v\right) \sqrt{1 + 2\left(\frac{k}{p}\right)^2 + \cos(2v)} dv}{\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \left(1 + \left(\frac{k}{p}\right)^2\right) \sqrt{1 + 2\left(\frac{k}{p}\right)^2 + \cos(2v)} dv}.$$

Значение интеграла в этой формуле также нельзя выразить в элементарных функциях даже для конкретных значений пределов интегрирования, так как он сводится к эллиптическим интегралам и может быть получен только численно.

Эквивалентный диаметр рассчитывается по формуле:

$$D_{\text{экв}} = \frac{4F}{P} = 2 \left(\frac{D}{2}\right) \frac{\int_{-v_0}^{v_0} \left(x \frac{dy}{dv} - y \frac{dx}{dv}\right) dv}{\int_{-v_0}^{v_0} \frac{k(1 + w_0^2 - k \cos v)}{w_0(1 + w_0^2)} \sqrt{1 + 2w_0^2 + \cos(2v)} dv}.$$

Аналогично тому, как это делалось при вычислении площади живого сечения и смоченного периметра можно получить приближенную формулу для вычисления эквивалентного диаметра:

$$D_{\text{экв}} \approx \left(\frac{D}{2}\right) k \frac{-3p^5 k - 6p^3 k^3 + 6pk^4 - 3pk^5 + 6p^2 k^2 (2 + k^2) + p^4 (6 + 4k^2)}{3p^3 (p^2 + k^2)^{1/2} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \left(1 + \left(\frac{k}{p}\right)^2 - k \cos v\right) \sqrt{1 + 2\left(\frac{k}{p}\right)^2 + \cos(2v)} dv}.$$

Были рассчитаны конкретные значения площади живого сечения, смоченного периметра и эквивалентного диаметра, которые представлены в табл.

Таблица

Характеристики поперечного сечения пружинно-витого канала

	$\kappa=1/2$	$\kappa=1/5$	$\kappa=1/10$
v_0	1,55805	1,56999	1,57070
w_0	0,16121	0,06379	0,03185
S/d	1,01294	1,00203	1,00051
$F/(D/2)^2$	1,2064	2,2428	2,6704
$F/(D/2)^2$	1,2015	2,2428	2,6704
$P/(D/2)$	4,1029	5,35507	5,80667
$P/(D/2) \approx$	4,11562	5,35539	5,80669
$D_{\text{экв}}/(D/2)$	1,17614	1,67525	1,83954
$D_{\text{экв}}/(D/2) \approx$	1,17227	1,67515	1,83953

Заключение

Рассчитанные значения площади живого сечения, смоченного периметра и эквивалентного диаметра являются необходимыми характеристиками канала для получения расчетных инженерных зависимостей, определяющих процессы гидромеханики и теплообмена в пружинно-витых каналах.

Список библиографических ссылок

1. Касаткин А.Г. Основные процессы и аппараты химической технологии. – М.: Химия, 1971. – 782 с.

2. Золотонос Я.Д., Князева И.А. Изготовление теплообменных аппаратов нового поколения на базе пружинно-витых каналов // Тезисы докладов XV Международного симпозиума «Энергоэффективность и энергосбережение в республике Татарстан». – Казань, 2015.
3. Евсеев Е.С., Золотонос А.Я., Золотонос Я.Д. Высокоэффективные теплообменные аппараты на базе теплообменных элементов в виде пружинно-витых труб // Труды АкадемЭнерго. – М., 2008, № 4. – С. 18-33.
4. Басова О.А., Золотонос Я.Д. Змеевиковый теплообменник на базе пружинно-витых каналов // Сборник научных трудов. – Казань. 2009. – С. 33-35.
5. Князева И.А., Золотонос Я.Д. Змеевиковый теплообменник и способ его изготовления // Тезисы доклада 66 Всероссийской научной конференции по проблемам архитектуры и строительства. – Казань: КГАСУ, 2014. – 173 с.
6. Патент РФ № 62694 на полезную модель. Теплообменный элемент / Золотонос А.Я., Золотонос Я.Д., Конахина И.А. № 2006143517/22, заявл. 07.12.06; опубл. 27.07.07; Бюл. № 12.
7. Патент РФ № 64750 на полезную модель. Теплообменный элемент / Золотонос А.Я., Золотонос Я.Д. № 2007107173/22, заявл. 26.02.07; опубл. 10.07.07; Бюл. № 19.
8. Норден А.П. Краткий курс дифференциальной геометрии. – М.: Физматгиз, 1958. – 244 с.
9. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 1975. – 631 с.
10. Кудрявцев И.А. Курс математического анализа. – М.: Высшая школа, 1981. – 687 с.

Vachagina E.K. – doctor of technical sciences

E-mail: vachagina@mail.ru

Kazakh Scientific Center of the Russian Academy of Sciences

The organization address: 420111, Russia, Kazan, Lobachevsky st., 2/3

E-mail: vachagina@mail.ru

Zolotonosov Ya.D. – doctor of technical sciences, professor

E-mail: zolotonosov@mail.ru

Mustakimova S.A. – lead programmer

E-mail: mustakim@kgasu.ru

Krutova I.A. – post-graduate student

E-mail: iraida_knyazeva@mail.ru

Kazan State University of Architecture and Civil Engineering

The organization address: 420043, Russia, Kazan, Zelenaya st., 1

The definition of equivalent diameter of spring-twisted pipes

Resume

The method of calculating the area of the living section, wetted perimeter and equivalent diameter of the cylindrical spring twisted channel was presented. The inner boundary of such channels is formed closely adjacent to each other coils coiled in a spiral with some constant pitch of the wire. For this the equation of the surface of wire twisted in a helical spiral was written in parametric form. Was formulated in terms of tight junction turns of wire to each other. These conditions are reduced to the dependence of one geometric parameter from the other geometric parameter. It makes sense the relationship of the step helix to the diameter of the wire, and has a sense of the relationship of the wire diameter to the diameter of the axial bending of the Central helix of wire. The required dependence is obtained from the search of the root of the nonlinear equation in the where parameter can be considered as a parameter. To search root used numerical methods to find the root of nonlinear equation, including the method of halving. The equation of the boundary of the cross section was obtained as the equation of a curve in cross-section of his plane. Thus, the equation of this curve is the border was also presented in a parametric form. To compute the area of the living section was used standard formulas to find the area of a curvilinear sector in polar coordinates. The formula for calculating the cross sectional area has been transformed considering the fact that the curve bounding the cross section is given in

parametric form. To calculate the wetted perimeter was used the standard formula of mathematical analysis to determine the length of a curve given parametrically. Calculation of equivalent diameter using the proposed method allows producing engineering calculations series of heat exchangers in which heat exchange elements are spring-twisted channels.

Keywords: heat transfer, fluid flow, and spring-twisted channels, covariant and contravariant components of velocity, streamlines, secondary flows.

Reference list

1. Kasatkin A.G. Basic processes and apparatuses of chemical technology. – M.: Chemistry, 1971. – 782 p.
2. Zolotonosov Ya.D., Knyazeva I.A. Manufacturing of heat exchangers of a new generation on the basis of spring-twisted channels // Proceedings of XV International Symposium «Energy Efficiency and conservation in the Republic of Tatarstan». – Kazan, 2015.
3. Evseev E.S., Zolotonosov A.Ja., Zolotonosov Ya.D. Highly efficient heat transfer devices based on heat-exchange elements in the form of spring-twisted pipe // transactions of AcademEnerg. – M., 2008, № 4. – P. 18-33.
4. Basova O.A., Zolotonosov Ya.D. Coil a heat exchanger on the basis of spring-twisted channels // Collection of scientific works. – Kazan, 2009. – P. 33-35.
5. Knyazeva I.A., Zolotonosov Ya.D. Coil a heat exchanger and method of its making // Abstracts of the 66 all – Russian scientific conference on problems of architecture and construction. – Kazan: KSUAE, 2014. – 173 p.
6. RF patent № 62694 utility model. The heat exchange element / Zolotonosov A.Ja., Zolotonosov Ya.D., Konahina I.A. № 2006143517/22, Appl. 07.12.06; publ. 27.07.07; bull. № 12.
7. RF patent № 64750 utility model. The heat exchange element / Zolotonosov A.Ja., Zolotonosov Ya.D. № 2007107173/22, Appl. 26.02.07; publ. 10.07.07; bull. № 19.
8. Norden A.P. A Short course in differential geometry. – M.: Fizmatgiz. 1958. – 244 p.
9. Bakhvalov N.S. The Numerical methods. – M.: Science, 1975. – 631 p.
10. Kudryavtsev I.A. A course of mathematical analysis. – M.: Higher school. 1981. – 687 p.