

УДК 539.5

Каюмов Р.А. – доктор физико-математических наук, профессор

E-mail: kayumov@rambler.ru

Шакирзянов Ф.Р. – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель

E-mail: faritbox@mail.ru

Бутенко А.В. – аспирант

E-mail: mm@bk.ru

Казанский государственный архитектурно-строительный университет

Адрес организации: 420043, Россия, г. Казань, ул. Зелёная, д. 1

**Приближенный метод вычисления деформаций ползучести
по наследственной теории и сравнение ее с инкрементальной теорией****Аннотация**

В работе рассматриваются методы расчета деформации ползучести по наследственной и инкрементальной теориям. Для их сравнения параметры первой находятся из условия минимальности квадратичной невязки деформаций ползучести, рассчитанных по этим теориям при постоянной нагрузке. Проводится анализ результатов, полученных по этим теориям при переменных нагрузках. Разрабатывается метод вычисления деформаций ползучести по наследственной теории с помощью аппроксимации напряжений по четырем их значениям в различные моменты времени.

Ключевые слова: механика грунтов, теория ползучести, наследственная теория ползучести, инкрементальная теория ползучести, аппроксимация.

Грунтам свойственны упругие (изменение объема и искажение формы) и неупругие (уплотнение, набухание, ползучесть) деформации, причем неупругие деформации вследствие ползучести могут быть значительно больше, чем упругие. Поэтому учет ползучести и выбор хорошо согласующейся с экспериментом модели необходим для описания процесса деформирования и оценки осадки грунтов.

Существуют различные модели ползучести, например, при рассмотрении вопроса ползучести грунтового массива в работе [1] была использована теория упрочнения, которая хорошо описывает процесс ползучести при медленно и монотонно изменяющихся напряжениях. Грунтам свойственны не только деформации необратимой ползучести, но и обратимой с течением времени [3]. Такое их поведение позволяет описать наследственная теория ползучести (теория вязкоупругости). В данной работе проводится сравнительный анализ двух теорий при постоянной и переменной нагрузках. Поскольку в наследственной теории ползучести необходимо запоминать всю предыдущую историю нагружения, что усложняет расчеты, то предлагается методика вычисления деформаций ползучести по наследственной теории с помощью аппроксимации напряжений по четырем их значениям в различные моменты времени.

Ниже наследственная теория ползучести принята в виде:

$$\varepsilon_{u.m.}^{cr} = \int_0^t \frac{C \cdot \sigma^\beta(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau. \quad (1)$$

Соотношение для деформаций ползучести по теории упрочнения принято в виде:

$$\dot{\varepsilon}_{u.m.}^{cr} = \frac{A \cdot \sigma^\beta(\tau)}{1 + R \cdot \varepsilon_{u.m.}^{cr}}, \quad (2)$$

где A , C – параметры, характеризующие степень текучести материала, β – параметр нелинейности, R – параметр упрочнения.

Решение уравнения (2) в общем случае имеет следующий вид:

$$\varepsilon_{u.m.}^{cr} + \frac{R \cdot (\varepsilon_{u.m.}^{cr})^2}{2} = A \cdot \int_0^t \sigma^\beta(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Для сравнения этих теорий параметры α , C в выражении (1) будем искать из условия минимальности квадратичной невязки деформаций ползучести:

$$\delta^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\varepsilon_{u.m.}^{cr}(t_i) - \varepsilon_{u.m.}^{cr}(t_i)]^2 = \min. \quad (4)$$

С целью использования соотношений ползучести в численных методиках решение уравнения (2) проводилось также методом конечных разностей, а именно, использовалось соотношение:

$$\dot{\varepsilon}_{u.m.}^{cr} = \frac{\varepsilon_k^{cr} - \varepsilon_{k-1}^{cr}}{\Delta t} \tag{5}$$

Тогда (2) примет вид:

$$(\varepsilon_{u.m.}^{cr})_k = \frac{A \cdot \sigma^\beta(t_k)}{1 + C \cdot (\varepsilon_{u.m.}^{cr})_{k-1}} \Delta t + (\varepsilon_{u.m.}^{cr})_{k-1} \tag{6}$$

Рассмотрим числовой пример. Для нахождения коэффициентов α и C зададимся исходными значениями переменных:

Таблица 1

Значения исходных параметров

Переменные	Значение
T_{max}	1100
N_{max}	4
A	$1,11 \times 10^6$
β	1,2
R	11×10^5
σ	50

Из условия (4) получим искомые значения коэффициентов: $\alpha = 0,491667$, $C = 2,16667 \times 10^{-7}$.

При заданных коэффициентах α , C проведем анализ сходимости от количества шагов (n) по времени при постоянной нагрузке $\sigma(t) = const$. На рис. 1 показана диаграмма деформирования при различных значениях n .

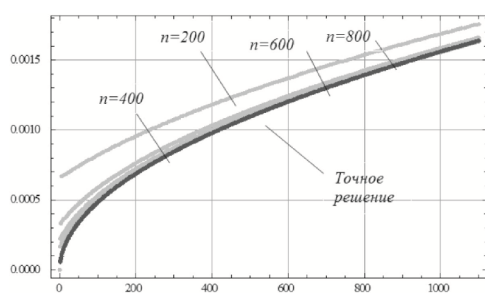


Рис. 1. Диаграмма деформирования при различных значениях n

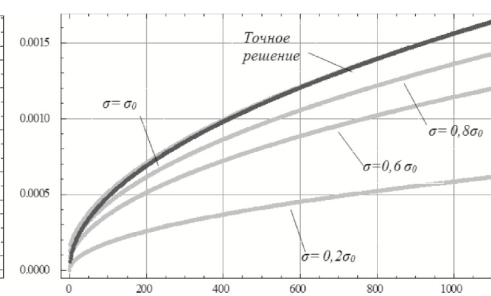


Рис. 2. Диаграмма деформирования при различных значениях σ

Таким образом, при $n=800$ метод конечных разностей дает хорошее решение близкое к точному.

Однако это наблюдается только при данном значении σ поскольку коэффициенты α и C зависят от σ . Покажем это, изменяя значение σ .

Как видно из графиков, при других значениях напряжений $\sigma \neq \sigma_0$ значения деформаций ползучести, найденные по различным теориям, могут сильно отличаться.

Далее рассматривается сравнение двух теорий ползучести при переменной нагрузке ($\sigma(t) \neq const$). Для этого зададим закон распределения истинных напряжений в следующем виде:

$$\sigma(t) = \sigma_1 \sin(\omega t) + \sigma_0 \tag{7}$$

где σ_1 , σ_0 – значения напряжений, t – время, ω – амплитуда.

Примем следующие значения параметров:

Таблица 2

Значения исходных параметров

Переменные	Значение
T_{max}	2000
N_{max}	400
A	$1,11 \times 10^6$
β	1,2
R	11×10^5
σ_0	50
σ_1	50
ω	$0,001\pi$

После подстановки (7) в (1) и (2) и их аналитического решения приведем зависимость ϵ_t^{cr} по различным теориям (рис. 3):

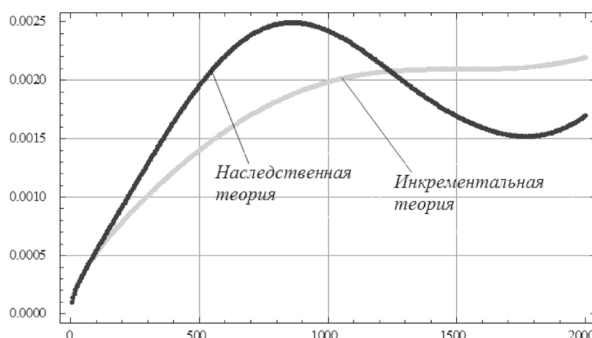


Рис. 3. Диаграмма деформирования при переменной нагрузке

Как и ожидалось, при переменной нагрузке теории также дают сильно различающиеся результаты. Таким образом, инкрементальная теория и наследственная теория ползучести не взаимозаменяемы в случае применения напряжений, переменных во времени (например, в случае наличия явления релаксации, циклических нагрузок). Следовательно, при описании поведения грунтов желательно считать, что деформации ползучести состоят из двух частей, одна из которых определяется по наследственной теории ползучести, а вторая – по инкрементальной теории.

Далее рассмотрим методику приближенного, но быстрого расчета деформации ползучести по наследственной теории.

При определении деформации ползучести ϵ^{cr} по соотношению (1) необходимо знать напряжения на каждом шаге по времени. Чтобы не хранить все промежуточные значения напряжений в памяти, будем использовать их аппроксимации по четырем значениям напряжений, используя интерполяционный многочлен Лагранжа. В общем виде аппроксимация напряжений будет иметь вид:

$$\sigma(t) = \sigma_1 l_1 + \sigma_2 l_2 + \sigma_3 l_3 + \sigma_4 l_4 \tag{8}$$

Базисные полиномы l_1, l_2, l_3, l_4 находятся из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{\tau-t_2}{t_1-t_2} \cdot \frac{\tau-t_3}{t_1-t_3} \cdot \frac{\tau-t_4}{t_1-t_4}, \\ l_2 &= \frac{\tau-t_1}{t_2-t_1} \cdot \frac{\tau-t_3}{t_2-t_3} \cdot \frac{\tau-t_4}{t_2-t_4}, \\ l_3 &= \frac{\tau-t_1}{t_3-t_1} \cdot \frac{\tau-t_2}{t_3-t_2} \cdot \frac{\tau-t_4}{t_3-t_4}, \\ l_4 &= \frac{\tau-t_1}{t_4-t_1} \cdot \frac{\tau-t_2}{t_4-t_2} \cdot \frac{\tau-t_3}{t_4-t_3}, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ – напряжения в узлах аппроксимации t_1, t_2, t_3, t_4 – соответственно. Примем разбиение интервала $0 - t_k$ узлами в следующем соотношении:

$$t_1=0; t_2 = n_1 t_k; t_3 = n_2 t_k; t_4 = t_k, \tag{10}$$

где t_k – значение времени в данный момент.

Коэффициенты n_1, n_2 должны выбираться из условия наилучшей аппроксимации исходной функции. Однако это возможно лишь в тестовых задачах, поэтому здесь они выбраны априори из условия, что вес напряжений в (1) тем меньше, чем меньше время τ по сравнению с t .

Подставляя (8) в (1) получим следующее выражение:

$$\epsilon^{cr} = \int_0^t \frac{C \cdot (\sigma_1 \cdot l_1 + \sigma_2 \cdot l_2 + \sigma_3 \cdot l_3 + \sigma_4 \cdot l_4)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau. \tag{11}$$

Интегрируя (11) получим выражение для деформаций ползучести. Ввиду их громоздкого вида здесь они не приводятся.

В качестве тестовой решалась задача определения деформаций ползучести при внешней нагрузке, заданной в следующем виде:

$$q(t) = q \cdot \left(1 + k_q \cdot \sin \left(\frac{2 \cdot p \cdot t}{T_{max}} \right) \right), \tag{12}$$

где q – значение внешней нагрузки, k_q – масштабный коэффициент, T_{max} – общее время.

Примем следующие исходные значения переменных:

Таблица 3

Значения исходных параметров

Переменные	Значение
T_{max}	15
N_{max}	120
k_q	0,81
n_1	0,33
n_2	0,66
ω	$\frac{1}{100} \cdot P$

На рис. 4 построены графики исходной функции напряжений (12) и функции напряжений, полученных с помощью аппроксимации (8).

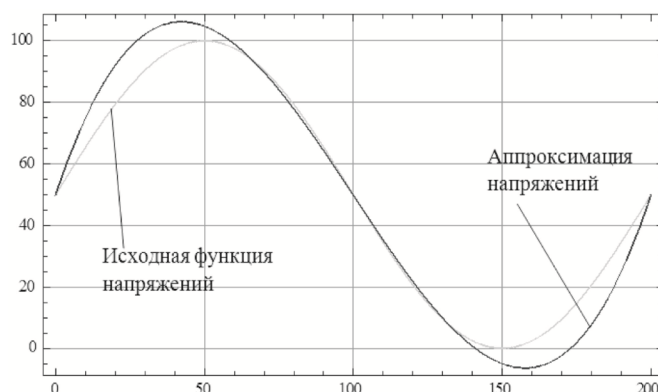


Рис. 4. Аппроксимация напряжений

Как можно видеть из графика, аппроксимация дает функцию достаточно близкую к исходной функции при заданных значениях параметров n_1, n_2 . Таким образом, мы можем искать напряжения из уравнения (8) и далее, подставляя найденные значения в уравнение (1), получать ϵ^{cr} .

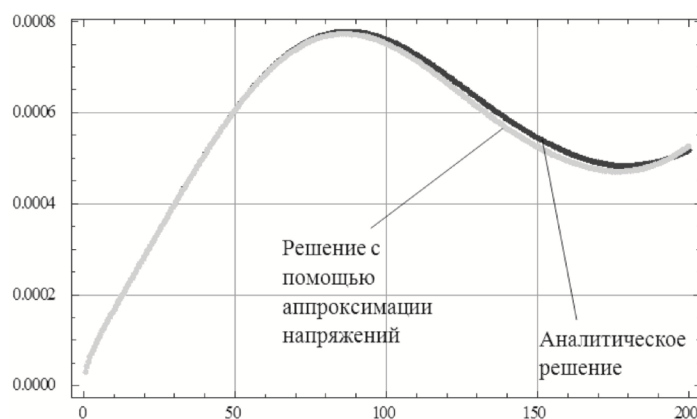


Рис. 5. Деформации ползучести по наследственной теории

На рис. 5. представлены графики деформаций ползучести, полученные путем аналитического решения и использования аппроксимации напряжений. Видно, что результаты отличаются мало.

Интересно отметить, что разница в деформациях ползучести, как это видно из сравнения рис. 4 и рис. 5, меньше, чем разница в функциях, описывающих изменение напряжений во времени. Приведем пример при других значениях параметров.

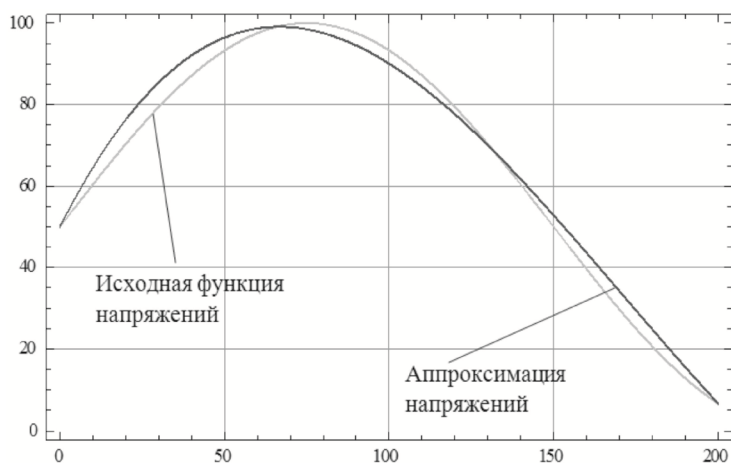


Рис. 6. Аппроксимация напряжений

Таблица 4

Значения исходных параметров

Переменные	Значение
T_{max}	15
N_{max}	120
k_q	0,81
n_1	0,33
n_2	0,66
ω	$\frac{1}{150} \cdot p$

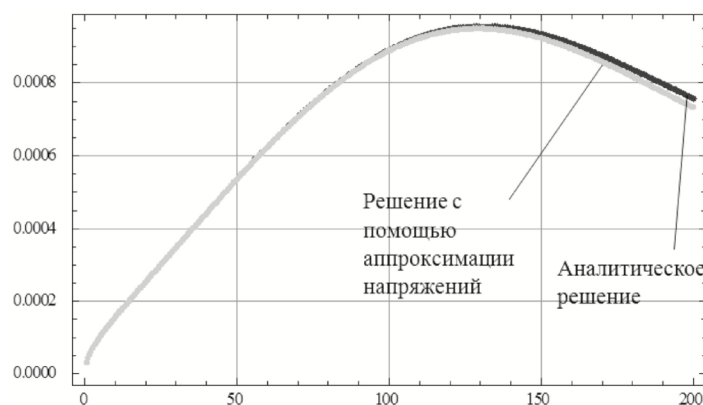


Рис. 7. Деформации ползучести по наследственной теории

Заключение. В работе проведено сравнение деформаций ползучести, вычисляемых по наследственной и инкрементальной теориям. Коэффициенты, входящие в выражение для вычисления деформаций по наследственной теории, определены из условия минимальности квадратичной невязки деформаций ползучести, полученных по разным теориям при некоторой заданной нагрузке. Показано, что близость решений по разным теориям наблюдается только при заданном уровне напряжений. При значениях нагрузок, отличных от тех, при которых были найдены эти коэффициенты, деформации ползучести сильно различаются. При переменной нагрузке теории также дают сильно

различающиеся результаты. Таким образом, инкрементальная и наследственная теории ползучести не взаимозаменяемы при напряжениях, переменных во времени (например, в случаях наличия релаксации напряжений, циклических нагрузок). Следовательно, при описании поведения грунтов необходимо считать, что деформации ползучести состоят из двух частей, одна из которых определяется по наследственной теории ползучести, а вторая – по инкрементальной теории.

Предлагается методика быстрого вычисления деформаций ползучести по наследственной теории путем аппроксимации напряжений полиномом Лагранжа по четырем значениям времени, которые меняются при изменении значения текущего времени. На тестовых задачах показано, что метод дает результаты, близкие к точным.

Список библиографических ссылок

1. Шакирзянов Ф.Р. Оценка несущей способности системы конструкция-грунт // Актуальные проблемы естественных и гуманитарных наук. Матер. научн.-практ. Конф., Ч. 1. – Зеленодольск: КФУ, 2012. – С. 23-27.
2. Вялов С.С. Реологические основы механики грунтов. – М.: Высшая школа, 1978. – 447 с.
3. Бережной Д.В., Коноплев Ю.Г., Секаева Л.Р. Исследование напряженно-деформированного состояния грунтов // Сб. материалов XV Всерос. межвуз. науч.-техн. конф. – Казань: КГУ, 2003. – С. 366-368.
4. Бережной Д.В., Карамов А.В., Сагдатуллин М.К. Моделирование деформирования поэтапной выемки грунта при строительстве подземных сооружений // Вестник Казанского государственного технологического университета, 2012, № 17. – С. 137-145.
5. Курочка К.С. Моделирование деформаций неоднородного вязкоупругопластического грунтового основания // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, 2010, № 3. – С. 16-23.
6. Санжаровский Р.С. Нелинейная наследственная теория ползучести // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, 2014, № 1. – С. 63-68.
7. Цытович Н.А. Механика грунтов. – М.: Госстройиздат, 1963. – 636 с.
8. Юшков Б.С., Сергеев А.С. Линейные уравнения наследственной ползучести в глинистых грунтах // Дороги и мосты, 2013, № 2 (30). – С. 45-59.
9. Зарецкий Ю.К. Лекции по современной механике грунтов. – Ростов-на-Дону: Издательство Ростовского университета, 1989. – 600 с.

Kayumov R.A. – doctor of physical and mathematical sciences, professor

E-mail: kayumov@rambler.ru

Shakirzyanov F.R. – candidate of technical sciences, senior lecturer

E-mail: faritbox@mail.ru

Butenko A.V. – post-graduate student

E-mail: mm@bk.ru

Kazan State University of Architecture and Engineering

The organization address: 420043, Russia, Kazan, Zelenaya st., 1

Approximate method for calculating the hereditary theory of creep deformation and comparison with the incremental theory

Resume

In this paper, a comparison of creep strain on hereditary and incremental theories. Found that at a constant load creep strain results by different theories may be very different. At variable load theory also give very different results. Thus, the incremental theory and hereditary creep theory are not interchangeable in the case of stress, time-varying (e.g., in the case of relaxation phenomena, cyclic loading). Consequently, in describing the behavior of soils, it is

desirable to assume that creep deformation consist of two parts, one of which is determined by the hereditary theory creep, and the second – on Incremental theory.

Developed a method for calculating the creep strain for hereditary creep theory in four of their values at different points in time. Deformation function approximation gives sufficiently close to the original function. The paper analyzes the convergence of the solution on the number of time steps.

Keywords: soil mechanics, the theory of creep, hereditary creep theory, incremental creep theory, approximation.

Reference list

1. Shakirzyanov F.R. Estimate the bearing capacity of the system construction-ground // Actual problems of science and the humanities. Material of science and practical conference, P. 1. – Zelenodolsk: KFU, 2012. – P. 23-27.
2. Vyalov S.S. Rheological basis of soil mechanins. – M.: Visshaya shkola, 1978. – 447 p.
3. Begezhnoi D.V., Konoplyov Y.G., Sekaeva L.R. Investigation of the stress-stain state of the soil // Sourcebook of Intercollegiate All-Russian Scientific and Technical Conference. – Kazan: KFU, 2003. – P. 366-368.
4. Berezhnoi D.V., Karamov A.V., Sagdatullin M.K. Simulation of deformation phase of excavation in the construction of underground structures // Bulletin of Kazan State Technological University, 2012, № 17. – P. 137-145.
5. Kurochka K.S. Modeling inhomogeneous viscoelastoplastic subgrade // Structural mechanics of engineer constructions and buildings, 2010, № 3. – P. 16-23.
6. Sanzharovsky R.S. Nonlinear hereditarty creep theory // Structural mechanics of engineer constructions and buildings, 2014, № 1. – P. 63-68.
7. Tsytoich N.A. Soil mechanics. – M.: Gosstroizdat, 1963. – 636 p.
8. Yushkov B.S., Sergeev A.S. Linear equations hereditarty creep theory in clay soils // Roads and Bridges, 2013, № 2 (30). – P. 45-59.
9. Zaretsky Y.K. Lectures on modern soil mechanics. – Rostov-on-Don: Izdatelstvo Rostovskogo Universiteta, 1989. – 600 p.