



УДК 539.3

Загниборода Н.А. – аспирант

E-mail: tssrat@mail.ru

Крысько В.А. – доктор технических наук, профессор

E-mail: tak@san.ru

Крысько А.В. – доктор физико-математических наук, профессор

E-mail: anton.krysko@gmail.com

Энгельсский технологический институт (филиал) СГТУ им. Гагарина Ю.А.

Адрес организации: 413100, Россия, г. Энгельс, пл. Свободы, д. 17

Шакирзянов Ф.Р. – кандидат физико-математических наук, ассистент

E-mail: faritbox@mail.ru

Казанский государственный архитектурно-строительный университет

Адрес организации: 420043, Россия, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1

Нелинейная динамика бесконечно длинных цилиндрических панелей¹

Аннотация

Гибкие пологие бесконечно длинные цилиндрические панели находят широкое применение в различных приборах электроники и гироскопии – микро-электро-механических системах (МЭМС-датчиков), которые являются составными частями моделей гироскопов с распределенной массой и большой амплитудой колебаний осцилляторов. В работе построена математическая модель анализа хаотической динамики гибких бесконечно длинных цилиндрических панелей, когда в качестве кинематической модели используется модель Кирхгофа-Лява. Геометрическая нелинейность учитывается в форме Т. фон Кармана. Обосновывается достоверность полученных результатов.

Ключевые слова: бифуркации, фазовые портреты, ляпуновские показатели, хаотические колебания бесконечно длинных цилиндрических панелей.

Введение

Гибкие пологие бесконечно длинные цилиндрические панели находят широкое применение в различных приборах электроники и гироскопии – микро-электро-механических системах (МЭМС-датчиков), которые являются составными частями моделей гироскопов с распределенной массой и большой амплитудой колебаний осцилляторов. В настоящее время наблюдается возрастающий спрос на применение МЭМС-датчиков для определения движения объекта и его скорости, измерения ускорения, угловых скоростей, давления, скорости потока жидкости или газа, температуры и влажности. Это связано с тем, что устройство, в конструкции которого используется МЭМС, обладает рядом преимуществ. К числу этих преимуществ относятся относительно низкая цена и малые габариты, малое энергопотребление, возможность интеграции электроники с механическими, оптическими и прочими узлами, стабильность работы в неблагоприятных условиях (перепады температур, удары, влажность, вибрация, электромагнитные и высокочастотные помехи).

Гироскопы способны реагировать на изменение углов ориентации тела относительно инерциального пространства и могут использоваться как датчики угловой скорости. Данные устройства нашли применение в системах инерциальной навигации беспилотными летательными аппаратами, а также в конструкциях систем безопасности в автомобилестроении.

1. История вопроса

Публикации, посвященные изучению нелинейных колебаний бесконечно длинных цилиндрических панелей, в научной литературе практически отсутствуют. Здесь мы

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (Соглашение № 14.В37.21.2018).

остановимся только на тех работах, которые нам известны из зарубежной литературы, – это нелинейные колебания гибких балок, причем их колебания рассматриваются с малым числом степеней свободы [1-10], и отечественной литературы [10-14].

В работе [1] авторы предпринимают численные исследования недиссипативных продольных колебаний балок. Отмечается, что при малой энергии колебаний исходные дифференциальные уравнения являются линейными и нелинейными при высокоэнергетических колебаниях. В работе [2] авторы дают сопоставление решений, полученных для анализа пространственно-временного поведения балок Эйлера-Бернулли двумя методами: Бубнова-Галеркина с использованием кубического полинома Эрмита и со спектральными полиномами Лагранжа. Анализ хаотических колебаний до критических режимов выпучивания балки с учетом взаимовлияния динамического прощелкивания и внутреннего резонанса приведен в работе [3]. С малым числом степеней свободы в работе [4] методом Бубнова-Галеркина по пространственной координате и Рунге-Кутты 4-ого порядка по времени исследуются нелинейные колебания гибких балок Эйлера-Бернулли при сжатии и поперечной периодической нагрузке с оценкой непредсказуемости и зафрактальных структур. Экспериментальным исследованиям хаотических колебаний в научной литературе уделяется очень мало внимания, исключением является работа [5], в которой приведены результаты аналитического экспериментального исследования условий возникновения хаотических колебаний после выпучивания сжатой балки под воздействием периодического возбуждения. Исследованию хаотической динамики балки с большой амплитудой методом Мельникова посвящена работа [6].

В работах [7-14] изучаются хаотические колебания балочных структур как систем с бесконечным числом степеней свободы. По пространственным координатам используется метод конечных разностей, задача Коши решается методом Рунге-Кутты 4-ого порядка точности.

2. Математическая модель

Двумерную область бесконечно длинной цилиндрической панели в декартовой системе координат определим следующим образом: $\Omega = \{(x, z) \in [0, a] \times [-h/2, h/2]\}$. Для построения математической модели хаотических колебаний гибких пологих бесконечно длинных цилиндрических панелей под действием поперечной знакопеременной нагрузки примем следующие гипотезы:

1. Тело бесконечно длинной цилиндрической панели считается упругим и подчиняется закону Гука;
2. Справедливы все гипотезы Кирхгофа-Лява;
3. Учитывается деформация срединной поверхности по теории Т. фон Кармана.

Для получения исходных дифференциальных уравнений используется принцип Гамильтона-Остроградского. Рассматривается процесс движения оболочки на отрезке времени t_0 и t_1 . Для этого отрезка времени сравниваются различные траектории движения точек системы между начальным и конечным положением. Истинные траектории отличаются от других возможных (совместимых со связями) траекторий тем, что для первых должно выполняться условие:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta K - \delta \dot{I} + \delta' W) dt = 0, \quad (1)$$

где \hat{E} – кинетическая энергия системы, \dot{I} – потенциальная энергия системы, $\delta' W$ – сумма элементарных работ внешних сил. В том случае, когда все силы, действующие на систему, имеют потенциал, равенство (1) получает вид:

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} (K - \dot{I}) dt = 0, \quad (2)$$

где $S = \int_{t_0}^{t_1} (K - \dot{I}) dt$ – действие по Гамильтону. Это равенство выражает известный принцип Гамильтона-Остроградского. Используя данный принцип и введение обычным образом продольных сил и моментов, получим известные размерные уравнения движения гибких пологих бесконечно длинных цилиндрических панелей. Воспользуемся следующими безразмерными параметрами:

$$\lambda = \frac{a}{h}, \quad \bar{w} = \frac{w}{h}, \quad \bar{u} = \frac{ua}{h^2}, \quad \bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \bar{t} = \frac{t}{\tau}, \quad \tau = \frac{a}{c},$$

$$c = \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{c}, \quad \bar{q} = \frac{qa^4}{h^4 E}, \quad \bar{k}_x = \frac{k_x a}{\lambda},$$
(3)

где $w(x, t)$ – перемещение элемента в направлении нормали; $u(x, t)$ – перемещение элемента в продольном направлении; ε – коэффициент диссипации; E – модуль Юнга; h – высота поперечного сечения панели; γ – удельный вес материала; g – ускорение свободного падения; k_x – геометрическая кривизна панели; t – время; $q = q_0 \sin(\omega t)$ – внешняя нагрузка. После этого искомые размерные дифференциальные уравнения в безразмерном виде примут вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k_x \frac{\partial w}{\partial x} + L_3(w, w) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{1}{\lambda^2} \left\{ -\frac{1}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + k_x \left[\frac{\partial u}{\partial x} - k_x w - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + L_1(u, w) + L_2(w, w) \right\} +$$

$$+ q - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} = 0,$$

$$L_1(u, w) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad L_2(w, w) = \frac{3}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad L_3(w, w) = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$
(4)

Выпишем только один вид краевых условий, для которых приведены численные результаты – левая сторона гибкой бесконечно длинной панели имеет глухую заделку ($x=0$), а правая – неподвижный шарнир ($x=a$):

$$w(0, t) = w(a, t) = u(0, t) = u(a, t) = w'_x(0, t) = w''_x(a, t) = 0.$$
(5)

Присоединим начальное условие:

$$w(x, 0) = \dot{w}(x, 0) = u(x, 0) = \dot{u}(x, 0).$$
(6)

3. Метод решения

Система нелинейных дифференциальных уравнений (4) с граничными условиями (5) и начальными условиями (6) сильно нелинейна и получение аналитического решения на данном уровне развития математики невозможно. Поэтому для её решения используем численные методы. Используя метод разделения переменных, систему уравнений в частных производных сведём к задаче Коши с помощью метода конечных разностей (МКР) по пространственным координатам второго порядка точности, а полученные системы обыкновенных дифференциальных уравнений по времени решаем методами Рунге-Кутты 4-ого и 6-ого порядка точности.

3.1. Метод конечных разностей

Для решения системы нелинейных уравнений используем конечноразностные аппроксимации, применяя разложение в ряд Тейлора в окрестности точки x_i . Рассмотрим сеточную область $G_N = \{0 \leq x_i \leq 1, x_i = i/N, i = 0..N\}$. Введем следующие разностные операторы при аппроксимации $O(c^2)$, где c – шаг по пространственной координате:

$$\Lambda_x(\cdot)_i = \frac{(\cdot)_{i+1} - (\cdot)_{i-1}}{2c}; \Lambda_{x^2}(\cdot)_i = \frac{(\cdot)_{i+1} - 2(\cdot)_i + (\cdot)_{i-1}}{c^2}; \Lambda_{x^4}(\cdot)_i = \frac{(\cdot)_{i+2} - (\cdot)_{i+1} + 6(\cdot)_i - (\cdot)_{i-1} + (\cdot)_{i-2}}{c^4},$$

тогда дифференциальные уравнения системы (4) в частных производных заменим на обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка по временной координате:

$$\begin{cases} \ddot{u}_i = \Lambda_{x^2}(u_i) - k_x \Lambda_x(w_i) + \Lambda_x(w_i) \Lambda_{x^2}(w_i), \\ \dot{w}_i + \varepsilon \dot{w}_i = \lambda^2 \left\{ -\frac{1}{12} \Lambda_{x^4}(w_i) + k_x [\Lambda_x(u_i) - k_x w_i - w_i \Lambda_{x^2}(w_i)] + \right. \\ \left. + \Lambda_{x^2}(u_i) \Lambda_x(w_i) + \Lambda_{x^2}(w_i) \Lambda_x(u_i) + \frac{3}{2} (\Lambda_x(w_i))^2 \Lambda_{x^2}(w_i) + q \right\}. \end{cases} \quad (8)$$

Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (8) методом замены переменных сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которую решаем методами Рунге-Кутты четвертого и шестого порядка точности.

3.2. Достоверность получаемых результатов

Для исследования нелинейной динамики бесконечно длинных гибких пологих панелей разработаны алгоритмы и пакеты программ, которые позволяют исследовать сходимость решения в зависимости от разбиения $x \in [0,1]$. Для этой цели интервал $[0,1]$ разбивался на 20, 40, 60, 80 точек, а область управляющих параметров $\{q_0, \omega_p\}$ разбивалась на $\{10 \times 10\}$, $\{20 \times 20\}$, $\{50 \times 50\}$, $\{100 \times 100\}$, $\{200 \times 200\}$, $\{300 \times 300\}$, т.е. приходилось решать и анализировать 1×10^2 , 4×10^2 , $2,5 \times 10^3$, 1×10^4 , 4×10^4 , 9×10^4 задач соответственно. Каждая из задач анализировалась с помощью быстрого преобразования Фурье – построения спектра мощности и анализа знака старшего ляпуновского показателя. Программный комплекс позволяет определять различные типы колебаний: гармонические, бифуркации удвоения периодов, колебания на независимых частотах, хаос и др. Графической интерпретацией результатов анализа служат карты режимов колебаний. Эти карты отражают характер нелинейного динамического процесса, позволяя ориентироваться в пределах исследуемых зон. Тип таких зон определяется с помощью цветовой гаммы, которая приведена на картах (табл. 1 и табл. 2).

В табл. 1 приведены карты зависимости от разбиения интервала $x \in [0,1]$ ($N = 20; N = 40; N = 60; N = 80$). Зеленый цвет на картах в цветном исполнении и насыщенный темно-серый в черно-белом исполнении указывает на зоны, где решения расходятся. При разбиении $N = 80$ решение существует практически для любой пары параметров, кроме того, наблюдается высокая степень совпадения с предыдущим разбиением, поэтому далее исследования ведутся с разбиением $N = 80$.

Решения, приведенные на табл. 1, получены при решении задачи Коши методом Рунге-Кутты 4-ого порядка точности. В табл. 2 показаны карты характера колебаний для бесконечно длинных гибких пологих цилиндрических панелей при значении безразмерного геометрического параметра $k_x = 12$ и $k_x = 48$, полученных с помощью метода Рунге-Кутты 4-ого и 6-ого порядка точности при решении задачи Коши. Результаты полностью совпадают, но предпочтение здесь стоит отдать методу Рунге-Кутты 4-ого порядка точности, так как время, затраченное на построение карт режимов колебаний, в 1,5-2 раза меньше.

Таблица 1

Исследование сходимости модели по числу точек

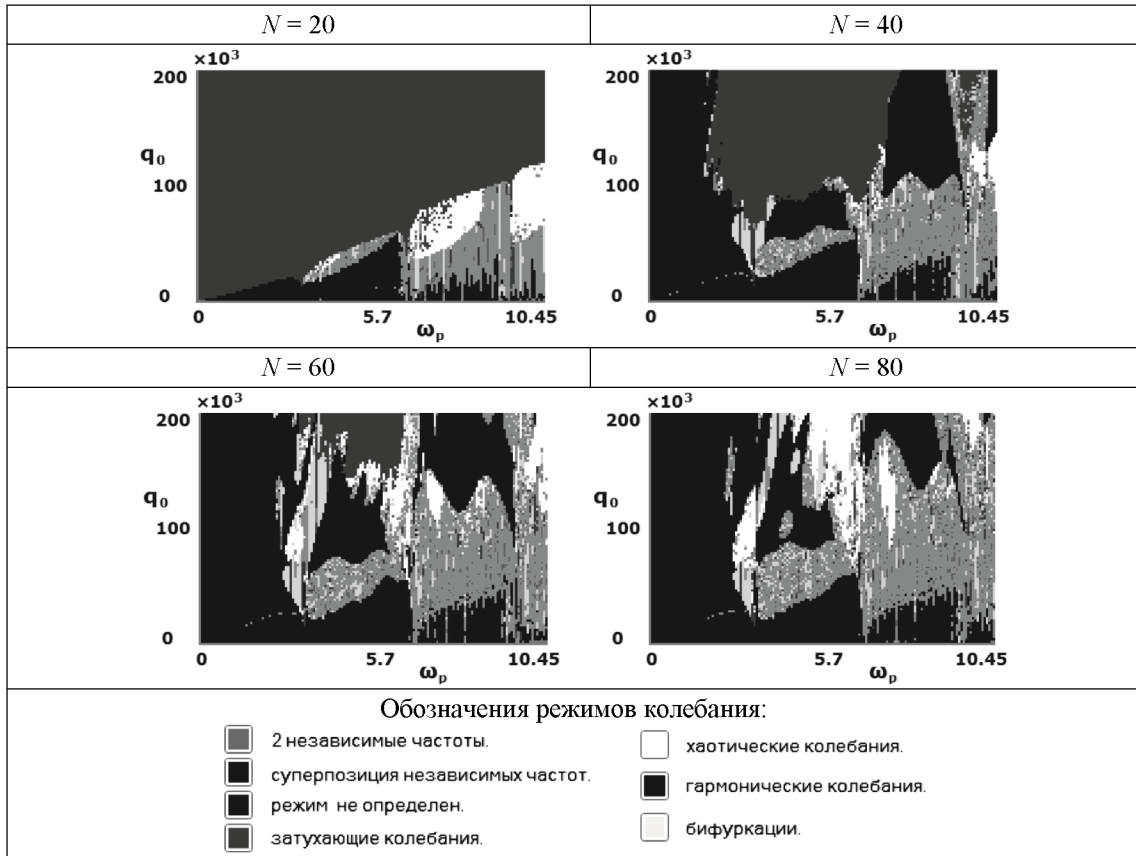
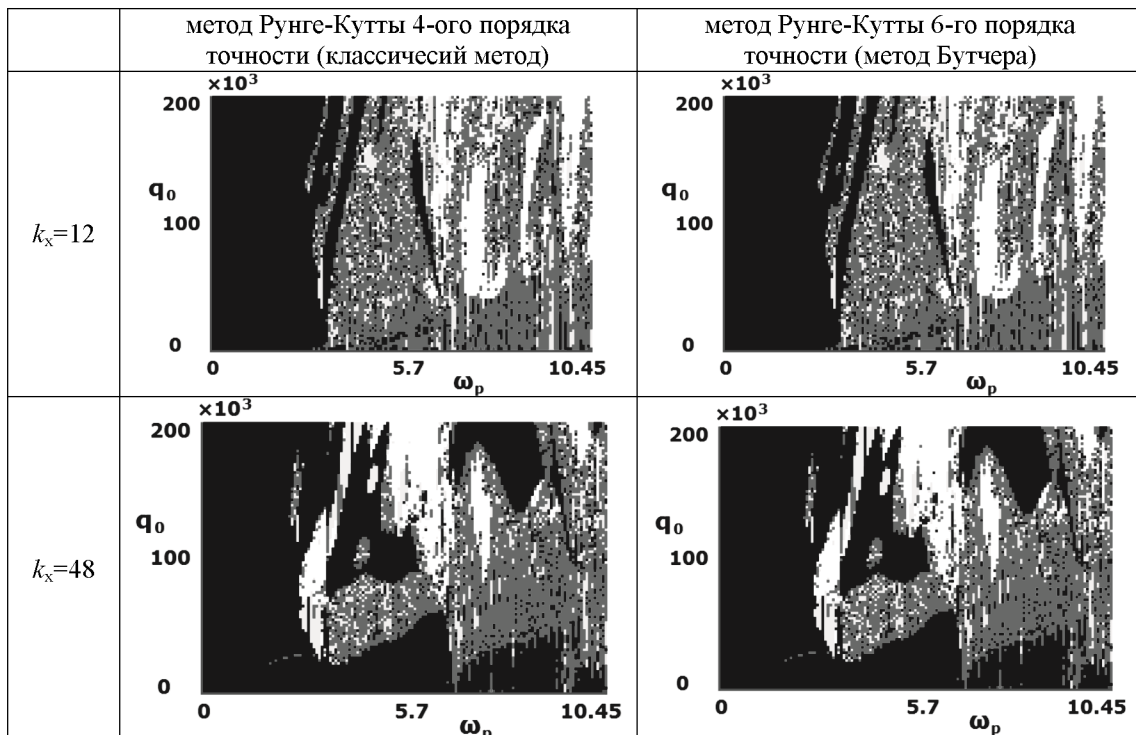


Таблица 2

Исследование сходимости по методу

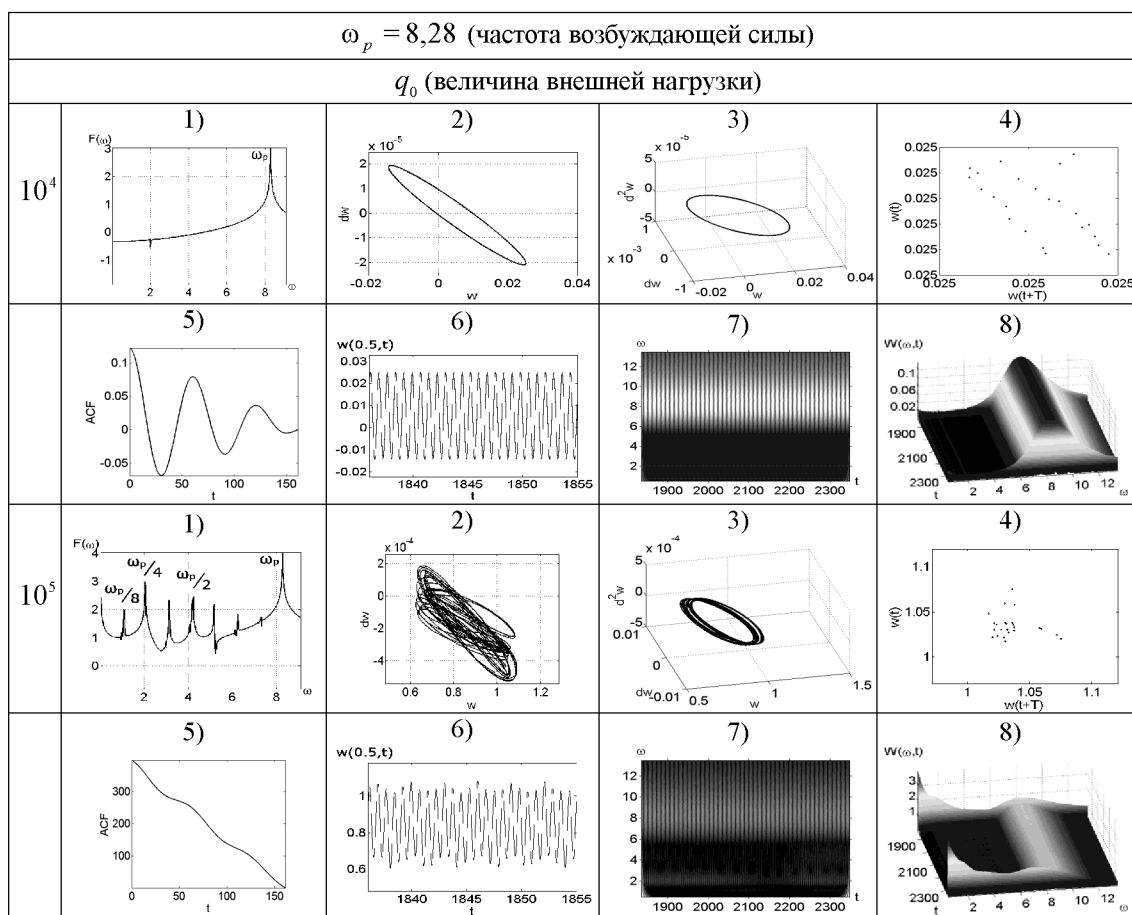


Практическое применение карт режимов колебаний заключается в возможности определения допустимых значений управляющих параметров. Наиболее благоприятным является гармонический режим колебаний, так как напряжения в панели меняются равномерно. Хаотический режим, напротив, приводит к резким скачкам напряжений, потере устойчивости, что негативно сказывается на прочности конструкции и может привести к её разрушению.

В таблицах 3 и 4 для безразмерных геометрических параметров $k_x = 12$ и $k_x = 48$ приведены: 1) спектр мощности Фурье, 2) модальный портрет 2-d, 3) фазовый портрет 3-d, 4) сечение Пуанкаре, 5) автокорреляционная функция, 6) сигнал, 7), 8) – вейвлет Морле 2-d и 3-d при соответствующих значения q_0 и ω_p .

Таблица 3

Различные сигналы при геометрическом безразмерном параметре $k_x=12$



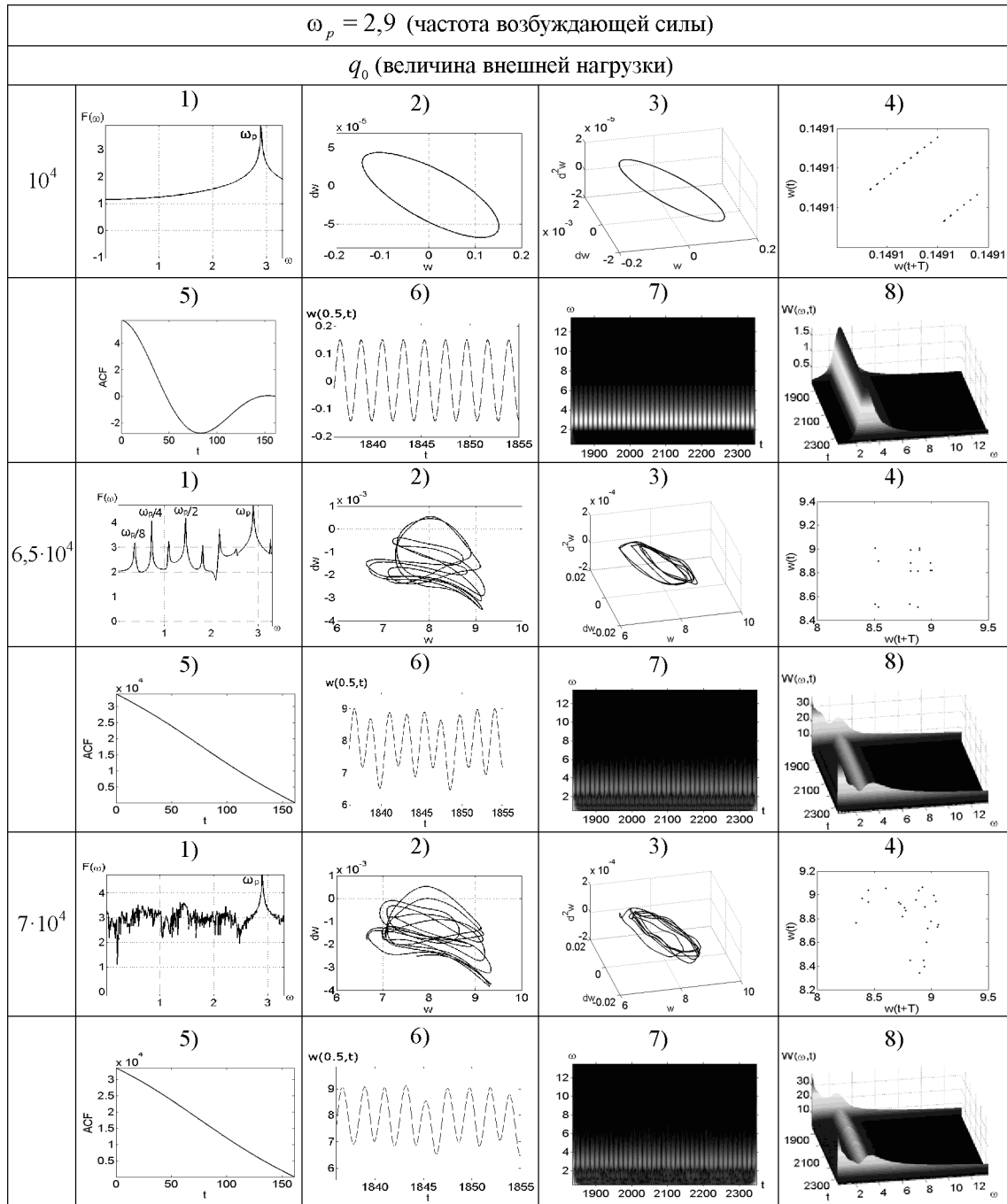
Следует отметить, что аналитика вейвлетных преобразований сигнала определяется математической базой разложения сигнала, которая аналогична преобразованию Фурье. Основной отличительной особенностью вейвлет-преобразования является новый базис разложения сигнала. Свойства вейвлетов принципиально важны как для самой возможности разложения сигналов по единичным вейвлетным функциям, так и для целенаправленных действий над вейвлетными спектрами сигналов, в том числе с последующей реконструкцией сигналов по образованным вейвлетным спектрам. Вейвлет анализ – это тот «микроскоп», который позволяет уловить изменение характера колебаний сигналов по времени, что невозможно сделать с помощью преобразования Фурье. На соответствующих графиках таблиц 3 ($q_0 = 10^5$, (7)) и 4 ($q_0 = 5 \times 10^4$, (7); $q_0 = 2 \times 10^5$, (7) при $\omega_p=6,279$) это хорошо видно.

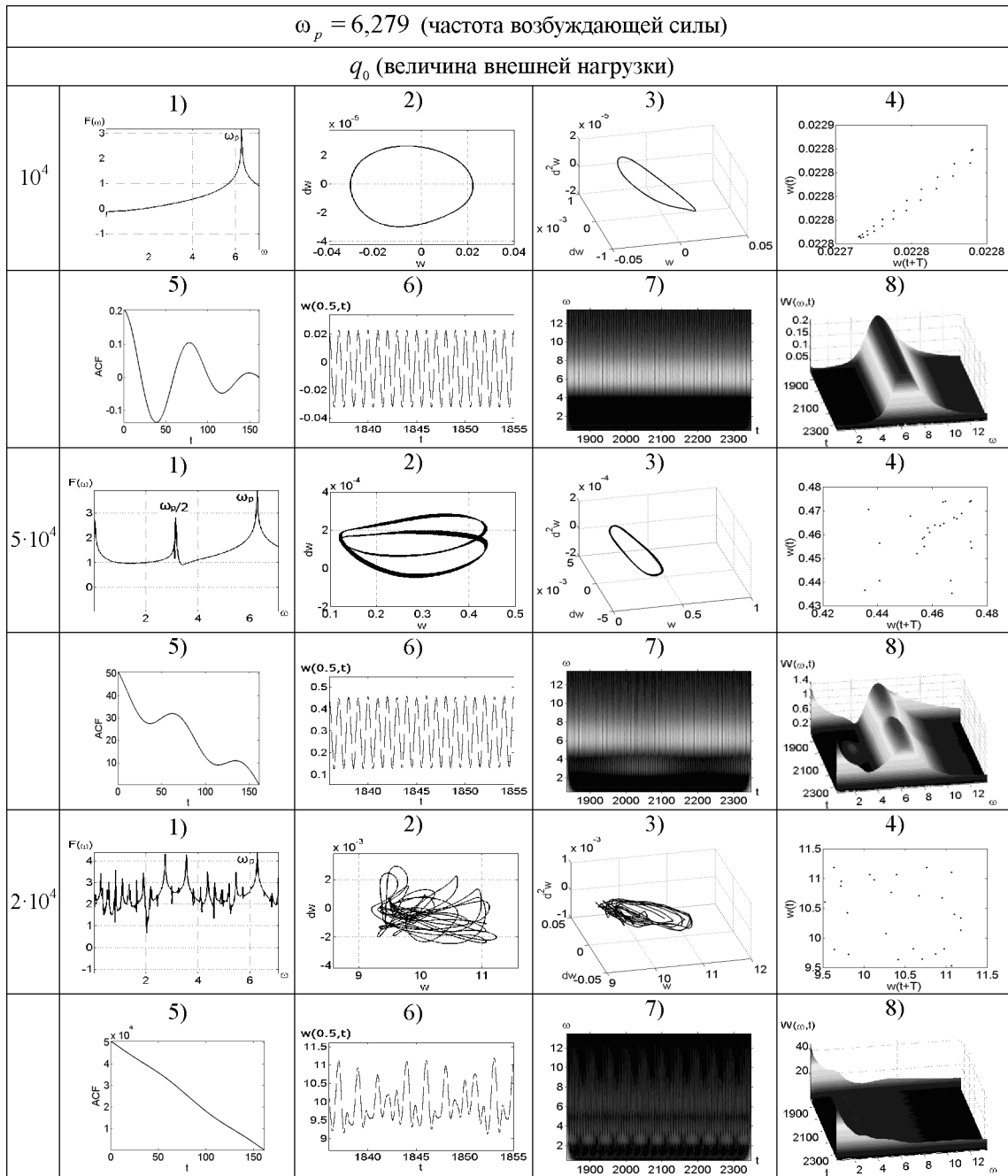
Фазовый портрет характеризует изменения распределенной системы во времени и, построенный для 3-мерного случая, рассматривает изменение в точке прогиба, скорости и ускорения. Модальный портрет характеризует изменение изгибания поверхности во времени в той же точке с помощью геометрических характеристик: прогиба, угла поворота и кривизны.

Процесс перехода колебаний панели из гармонического режима колебаний в хаотический режим происходит по сценарию Фейгенбаума с образованием серии бифуркаций удвоения (бифуркации Хопфа), что отчетливо заметно при анализе спектра мощности.

Таблица 4

Различные сигналы при геометрическом безразмерном параметре $k_x = 48$





Список литературы

1. Berdichevskiy V., Ozbek A., Shekhtman I., Volovoi V. High energy beam vibrations // 35th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Struct., Struct. Dyn. and Mater. Conf., Hilton Head, S. c. Apr. 18-20, 1994: Collect. Techn. Pap. Pt. 3. – Washington (D.C.), 1994. – P. 1456-1458.
2. Bar-Yoseph P.Z., Fifer D., Gottlieb O. Spectral element methods for nonlinear spatio-temporal dynamics of Euler-Bernoulli beam // Comput. Mech, 1996, 19, 2. – P. 136-151.
3. Yamaguchi T., Nagai K., Suzuki H. Nihon kikai gakkai ronbunshu. // C N Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. C., 2000, 66, № 652. – P. 3820-3827.
4. Ng T.Y., Daolin Xu. Multiple stability and unpredictable outcomes in the chaotic vibrations of Euler beams // Trans. ASME. J. Vibr. And Accoust, 2002, 124, № 1. – P. 126-131.

5. Nagai K. Chaos in post-buckled beams with asymmetric property under periodic excitation // 19th Int. Cong. Theor. And. Mech., Kyoto, Aug. 25-31, 1996: Abst. – Kyoto, 1996. – 283 p.
6. Han Q., Zheng X. Chaotic response of a large deflection beam and effect of the second order mode // Eur. J. Mech. A., 2005, 24, № 6. – P. 944-956.
7. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Vakakis A. Nonlinear dynamics of continuous elastic systems. – N.Y.: Springer, 2004. – 341 p.
8. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Krysko A.V. Thermo-dynamics of plates and shells. – N.Y.: Springer, 2007. – 778 p.
9. Krysko V.A., Awrejcewicz J. Chaos in structural mechanics. – N.Y.: Springer, 2008. – 437 p.
10. Awrejcewicz J., Krysko A.V., Bochkarev V.V., Babenkova T.V., Papkova I.V., Mrozowski J. Chaotic vibrations of two-layered beams and plates with geometric, physical and design nonlinearities / International Journal of Bifurcation and Chaos, 2011, Vol. 21, № 10. – P. 2837-2851.
11. Крысько В.А., Жигалов М.В., Салтыкова О.А., Десятова А.С. Диссипативная динамика геометрически нелинейных балок Бернулли-Элера // Изв. РАН. Механика твердого тела, 2008, № 6. – С. 128-136.
12. Крысько В.А., Папкина И.В., Солдатов В.В. Анализ нелинейных хаотических колебаний пологих оболочек вращения с помощью вейвлет-преобразования // Изв. РАН. Механика твердого тела, 2010, № 1. – С. 107-117.
13. Крысько В.А., Жигалов М.В., Салтыкова О.А., Крысько А.В. Об учете влияния поперечных сдвигов на сложные нелинейные колебания упругих балок // ПМТФ, 2011, Т. 52, № 5. – С. 186-193.
14. Крысько В.А., Коч М.И., Жигалов М.В., Крысько А.В. Фазовая хаотическая синхронизация колебаний многослойных балочных структур // Прикладная механика и техническая физика, 2012, Т. 53, № 3. – С. 166-175.

Zagniboroda N.A. – post-graduate student

E-mail: tssrat@mail.ru

Krysko V.A. – doctor of technical sciences, professor

E-mail: tak@san.ru

Krysko A.V. – doctor of physical and mathematical sciences, professor

E-mail: anton.krysko@gmail.com

Saratov State Technical University

The organization address: 413100, Russia, Engels, pl. Svoodi, 17

Shakirzyanov F.R. – candidate of physical and mathematical sciences, assistant

E-mail: faritbox@mail.ru

Kazan State University of Architecture and Engineering

The organization address: 420043, Russia, Kazan, Zelenaya, 1

Nonlinear dynamics of an infinitely long cylindrical panels

Resume

Flexible shallow infinitely long cylindrical panels are widely used in various electronic devices and gyroscopes – a micro-electro-mechanical systems (MEMS sensors) that are part of the model gyros with distributed mass and large amplitude oscillations of the oscillators. A mathematical model for the analysis of chaotic dynamics of infinitely long flexible cylindrical panels when, the model of the Kirchhoff-Love is used as a kinematic model, was built in this paper. Geometric nonlinearity is taken into account in the form of T. von Karman. Nonlinear partial differential equations are reduced to the Cauchy problem using the finite difference method with an error $O(h^2)$ and the finite element method. Cauchy problem is solved by Runge-Kutta method of the fourth and the sixth order of accuracy. The resulting maps oscillation modes for infinitely long flexible shallow cylindrical panels allow determining the permissible values of the control parameters. Substantiates the reliability of the results.

Keywords: bifurcation, phase portraits, Lyapunov exponents, chaotic vibrations of infinitely long cylindrical panels.

References

1. Berdichevskiy V., Ozbek A., Shekhtman I., Volovoi V. High energy beam vibrations // 35th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Struct., Struct. Dyn. and Mater. Conf., Hilton Head, S. c. Apr. 18-20, 1994: Collect. Techn. Pap. Pt. 3. – Washington (D.C.), 1994. – P. 1456-1458.
2. Bar-Yoseph P.Z., Fifer D., Gottlieb O. Spectral element methods for nonlinear spatio-temporal dynamics of Euler-Bernoulli beam // *Comput. Mech.*, 1996, 19, 2. – P. 136-151.
3. Yamaguchi T., Nagai K., Suzuki H. Nihon kikai gakkai ronbunshu. // *C N Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. C.*, 2000, 66, № 652. – P. 3820-3827.
4. Ng T.Y., Daolin Xu. Multiple stability and unpredictable outcomes in the chaotic vibrations of Euler beams // *Trans. ASME. J. Vibr. And Acoust.*, 2002, 124, № 1. – P. 126-131.
5. Nagai K. Chaos in post-buckled beams with asymmetric property under periodic excitation // 19th Int. Cong. Theor. And Mech., Kyoto, Aug. 25-31, 1996: Abst. – Kyoto, 1996. – 283 p.
6. Han Q., Zheng X. Chaotic response of a large deflection beam and effect of the second order mode // *Eur. J. Mech. A.*, 2005, 24, № 6. – P. 944-956.
7. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Vakakis A. Nonlinear dynamics of continuous elastic systems. – N.Y.: Springer, 2004. – 341 p.
8. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Krysko A.V. Thermo-dynamics of plates and shells. – N.Y.: Springer, 2007. – 778 p.
9. Krysko V.A., Awrejcewicz J. Chaos in structural mechanics. – N.Y.: Springer, 2008. – 437 p.
10. Awrejcewicz J., Krysko A.V., Bochkarev V.V., Babenkova T.V., Papkova I.V., Mrozowski J. Chaotic vibrations of two-layered beams and plates with geometric, physical and design nonlinearities / *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2011, Vol. 21, № 10. – P. 2837-2851.
11. Krysko V.A., Zhigalov M.V., Saltykova O.V., Desytova A.S. The dissipative dynamics of geometrically nonlinear Bernoulli-Euler's beams // *Math. RAS. Mechanics of Solids*, 2008, № 6. – P. 128-136.
12. Krysko V.A., Papkova I.V., Soldatov V.V. Analysis of non-linear chaotic oscillations of shallow shells of revolution using wavelet transform // *Math. RAS. Mechanics of Solids*, 2010, № 1. – P. 107-117.
13. Krysko V.A., Zhigalov M.V., Saltykova O.V., Krysko A.V. On account of the influence of transverse shear on the complex non-linear vibrations of elastic beams // *J. Appl.*, 2011, Vol. 52, № 5. – P. 186-193.
14. Krysko V.A., Koch M.I., Zhigalov M.V., Krysko A.V. The phase chaotic synchronization of oscillations of multi-beam structures // *Applied Mechanics and Technical Physics*, 2012, Vol. 53, № 3. – P. 166-175.