УДК 532.5:621.694
Мустакимова С.А. – ведущий программист
E-mail: mustakim@kgasu.ru
Казанский государственный архитектурно-строительный университет
Адрес организации: 420043, Россия, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1

Математическое моделирование гидродинамики и теплообмена закрученных течений в пружинно-витых каналах

Аннотация

Работа посвящена математическому моделированию турбулентного течения ньютоновской жидкости в пружинно-витых каналах. В основе модели лежат уравнения Навье-Стокса, осредненные по Рейнольдсу, энергии и уравнения теплопроводности стенок канала. Для замыкания системы уравнений выбрана двухпараметрическая $k-w$ модель.

Система уравнений, путем ряда подстановок, преобразована в безразмерный вид, что облегчает процесс численной реализации.

Ключевые слова: моделирование, турбулентное движение, пружинно-витой канал.

Темпы развития современной промышленности диктуют необходимость дальнейшего совершенствования теплообменного оборудования, создание принципиально новых теплообменных аппаратов, сочетающих в себе высокие единичные мощности при малых габаритах. В связи с этим одним из перспективных направлений исследований является разработка теплообменного оборудования с теплообменными элементами в виде пружинно-витых каналов.

Пружинно-витые каналы представляют собой тугую пружину, витки которой жестко скреплены [1-3].

Данная статья посвящена математическому моделированию гидродинамических и тепловых процессов в пружинно-витых каналах.

Для описания турбулентного течения вязкой несжимаемой жидкости в пружинно-витом канале вводится система координат $x_1 x_2 x_3$, начало которой находится на входе в канал, ось x_3 направляется вдоль оси канала.

Запишем уравнения движения, неразрывности и энергии для описания процессов гидродинамики и теплообмена в рассматриваемом канале [7]:

$$r v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + m \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (i = 1,2,3), \tag{2}$$

$$v_j \frac{\partial t}{\partial x_j} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x_j \partial x_j}. \tag{3}$$

Применяя осреднение по Рейнольдсу, запишем уравнения (1)-(3) в виде:

$$r \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + m \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-r \overline{v_i' v_j'}\right) \tag{4}$$

$$\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0, \tag{5}$$

$$\bar{v}_j \frac{\partial \bar{t}}{\partial x_j} = a \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial x_j} - \overline{v'_j t'} \right). \qquad (6)$$

Здесь $\bar{v}_j$ – компоненты осредненного вектора скорости $\vec{v}$; x_i, x_j – координаты $(i, j = 1,2,3)$; r – плотность, $\bar{p}$ – давление, a – коэффициент температуропроводности.

Для замыкания системы уравнений (4)-(6) применим двухпараметрическую $k-w$ модель турбулентности.

В этом случае уравнения переноса турбулентной кинетической энергии k и удельной скорости диссипации w [8] запишутся в виде:

$$r\bar{v}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = t_{ij} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - rb^* kw + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(m + s^* m_t \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right], \qquad (7)$$

$$r\bar{v}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = a \frac{w}{k} t_{ij} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - rbw^2 + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(m + sm_t \right) \frac{\partial w}{\partial x_j} \right], \qquad (8)$$

$$m_t = p\frac{k}{w}, \qquad (9)$$

$$t_{ij} = -r\overline{v'_i v'_j} = rm_t \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} r\, kd_{ij}, \qquad (10)$$

где модельные константы имеют значения [9]:

$$b^* = \frac{9}{100};\ b = \frac{3}{40};\ a = \frac{5}{9};\ b^* = \frac{9}{100};\ s = \frac{1}{2}.$$

В целях уменьшения числа неизвестных функций, преобразуем уравнения:

$$\bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{p}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{m}{r}\frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{k}{w}\left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} kd_{ij} \right];\ \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0;$$

$$\bar{v}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \left[\frac{k}{w}\left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} kd_{ij} \right] \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - b^* kw + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{m}{r} + \frac{s^* k}{w} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right];$$

$$\bar{v}_j \frac{\partial w}{\partial x_j} = a\frac{w}{k}\left[\frac{k}{w}\left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \right] \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - bw^2 + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{m}{r} + \frac{s^* k}{w} \right) \right] \frac{\partial w}{\partial x_j}.$$

Произведем суммирование уравнений по трем координатам, тогда уравнения движения запишутся в виде:

$$\bar{n}_1 \frac{\partial \bar{n}_1}{\partial x_1} + \bar{n}_2 \frac{\partial \bar{n}_1}{\partial x_2} + \bar{n}_3 \frac{\partial \bar{n}_1}{\partial x_3} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} + \frac{m}{r}\left(\frac{\partial^2 \bar{n}_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{n}_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \bar{n}_1}{\partial x_3^2} \right) - \frac{2}{3}\frac{\partial k}{\partial x_1} +$$

$$+ \left[\begin{array}{l} \frac{k}{w}\left(2\frac{\partial^2 \bar{v}_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right) + \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1} \right) \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{k}{w} \right) + \\ + \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_1} \right) \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{k}{w} \right) \end{array} \right]; \qquad (11)$$

$$\bar{n}_1\frac{\partial \bar{n}_2}{\partial x_1}+\bar{n}_2\frac{\partial \bar{n}_2}{\partial x_2}+\bar{n}_3\frac{\partial \bar{n}_2}{\partial x_3}=-\frac{1}{r}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_2}+\frac{m}{r}\left(\frac{\partial^2 \bar{n}_2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 \bar{n}_2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 \bar{n}_2}{\partial x_3^2}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial k}{\partial x_2}+$$
$$+\left[\begin{array}{l}\frac{k}{w}\left(2\frac{\partial^2 \bar{v}_2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 \bar{v}_2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 \bar{v}_1}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 \bar{v}_2}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 \bar{v}_3}{\partial x_2\partial x_3}\right)+\left(\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1}+\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{k}{w}\right)+\\ +\left(\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_3}+\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_2}\right)\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{k}{w}\right)\end{array}\right]; \quad (12)$$

$$\bar{n}_1\frac{\partial \bar{n}_3}{\partial x_1}+\bar{n}_2\frac{\partial \bar{n}_3}{\partial x_2}+\bar{n}_3\frac{\partial \bar{n}_3}{\partial x_3}=-\frac{1}{r}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_2}+\frac{m}{r}\left(\frac{\partial^2 \bar{n}_3}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 \bar{n}_3}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 \bar{n}_3}{\partial x_3^2}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial k}{\partial x_3}+$$
$$+\left[\begin{array}{l}\frac{k}{w}\left(2\frac{\partial^2 \bar{v}_3}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 \bar{v}_3}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 \bar{v}_1}{\partial x_1\partial x_3}+\frac{\partial^2 \bar{v}_3}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 \bar{v}_2}{\partial x_2\partial x_3}\right)+\left(\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_1}+\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{k}{w}\right)+\\ +\left(\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_2}+\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_3}\right)\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{k}{w}\right)\end{array}\right]; \quad (13)$$

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \bar{n}_1}{\partial x_1}+\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_2}+\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_3}=0 \quad (14)$$

Уравнение переноса для турбулентной кинетической энергии:

$$\bar{v}_1\frac{\partial k}{\partial x_1}+\bar{v}_2\frac{\partial k}{\partial x_2}+\bar{v}_3\frac{\partial k}{\partial x_3}=-\frac{2}{3}k\left(\frac{\partial \bar{n}_1}{\partial x_1}+\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_2}+\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_3}\right)-$$
$$+2\frac{k}{w}\left[\left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_3}\right)^2\right]+2\frac{k}{w}\left[\left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_3}\right)^2\right]+$$
$$-\frac{k}{w}\left[\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2}\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1}+2\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3}\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_1}+\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2}\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1}+\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_3}\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_2}+\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_3}\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_2}\right]+ \quad (15)$$
$$+\frac{k}{w}\left[\left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_2}\right)^2\right]-$$
$$-b^*kw+\left(\frac{m}{r}+\frac{k}{w}\right)\left(\frac{\partial^2 k}{\partial {x_1}^2}+\frac{\partial^2 k}{\partial {x_2}^2}+\frac{\partial^2 k}{\partial {x_3}^2}\right)+\left[\frac{\partial k}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{k}{w}\right)+\frac{\partial k}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{k}{w}\right)+\frac{\partial k}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{k}{w}\right)\right]$$

Уравнение переноса для удельной скорости диссипации энергии w **:**

$$\bar{v}_1\frac{\partial w}{\partial x_1}+\bar{v}_2\frac{\partial w}{\partial x_2}+\bar{v}_3\frac{\partial w}{\partial x_3}=-bw^2-\frac{2}{3}k\left(\frac{\partial \bar{n}_1}{\partial x_1}+\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_2}+\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_3}\right)+$$
$$+a\left[\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2}\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1}+2\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3}\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_1}+\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2}\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1}+2\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_2}\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_3}+\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3}\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_1}+\right]+$$
$$+a\left[\left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_2}\right)^2\right]+2a\left[\left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_3}\right)^2\right]+ \quad (16)$$
$$+\left(\frac{m}{r}+\frac{k}{w}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial {x_1}^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial {x_2}^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial {x_3}^2}\right)+\left[\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{k}{w}\right)+\frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{k}{w}\right)+\frac{\partial w}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{k}{w}\right)\right]$$

Для однозначной разрешимости системы уравнений (10)-(15) запишем граничные условия:

во входном сечении канала:

для давления: $p = p_0$; для скорости: $\bar{v}_1 = 0$, $\bar{v}_2 = 0$, $\bar{v}_3 = u_0$;

для температуры жидкости – t_0;

для температуры стенки – t_c;

для кинетической энергии турбулентности и ее удельной скорости диссипации энергии $k = k_0$, $w = w_0$;

в выходном сечении канала:

«мягкие» граничные условия $\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} = 0$, $\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_3} = 0$, $\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_3} = 0$, $\frac{\partial \bar{t}}{\partial x_3} = 0$, $\frac{\partial p}{\partial x_3} = 0$, $\frac{\partial k}{\partial x_3} = 0$, $\frac{\partial \omega}{\partial x_3} = 0$, что означает выравнивание гидродинамических характеристик потока на выходе;

на границе жидкости и твердой стенки:

для скорости – условия прилипания $\bar{v}_1 = 0$, $\bar{v}_2 = 0$, $\bar{v}_3 = 0$;

для температуры $\bar{t} = t_c$, $\lambda \left| \frac{\partial \bar{t}}{\partial \vec{n}} \right| = \lambda_c \left| \frac{\partial t_c}{\partial \vec{n}} \right|$, где $\vec{n}$ – вектор нормали, t_c – температура стенки канала; l, $l_{\tilde{n}}$ – соответственно теплопроводность жидкости и стенки;

для кинетической энергии турбулентности $k = 0$, $w = 0$;

на границе внешней стенки и теплоносителя: $\lambda_{\tilde{n}} \left| \frac{\partial t_{\tilde{n}}}{\partial \vec{n}} \right| = \alpha_{\grave{O}} \left(t_0 - t_c \right)$, где t_p – температура теплоносителя, $\alpha_{\grave{O}}$ – коэффициент теплоотдачи теплоносителя.

Далее произведем замену переменных, где $x = \frac{x_1}{a}$, $y = \frac{x_2}{a}$, $z = \frac{x_3}{a}$, кроме того, введем безразмерные функции вида:

$F_1(x,y,z)$, $F_2(x,y,z)$, $F_3(x,y,z)$, $K(x,y,z)$, $\Omega(x,y,z)$, $T(x,y,z)$, $T_c(x,y,z)$ и критерии подобия $\mathrm{Re} = \frac{u_0 d_{\acute{y}\hat{e}\hat{a}}}{n}$ – число Рейнольдса, $Fr = \frac{u_0^2}{gd}$ – число Фруда, где d – параметр винтовой линии.

Решение системы уравнений (11)-(16) будем искать в виде:

$$\begin{gathered} \bar{n}_1 = u_0 F_1(x,y,z),\ \bar{n}_2 = u_0 F_2(x,y,z), \\ \bar{n}_3 = u_0 F_3(x,y,z),\ \ p - p_0 = u_0^2 r P(x,y,z), \\ k = u_0^2 K(x,y,z),\ \ w = \frac{g}{u_0} \Omega(x,y,z), \\ \bar{t} = t_0 T_0(x,y,z),\ \ \bar{t}_{\tilde{n}} = t_c T_{\tilde{n}}(x,y,z). \end{gathered} \tag{17}$$

Используя подстановки (17) в уравнениях (11)-(16), получим:

уравнения движения:

$$\begin{gathered} F_1 \frac{\partial F_1}{\partial x} + F_2 \frac{\partial F_1}{\partial y} + F_3 \frac{\partial F_1}{\partial z} = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{d_{\acute{y}\hat{e}\hat{a}}}{a\,\mathrm{Re}} \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} \right) - \frac{2}{3}\frac{\partial K}{\partial x} + \\ + Fr \left[\begin{gathered} \left(\frac{K}{\Omega} \right) \left(2\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial z} \right) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{K}{\Omega} \right) + \\ + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} + \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{K}{\Omega} \right) \end{gathered} \right], \end{gathered} \tag{18}$$

$$F_1\frac{\partial F_2}{\partial x}+F_2\frac{\partial F_2}{\partial y}+F_3\frac{\partial F_2}{\partial z}=-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{d_{\acute{y}\hat{e}\hat{a}}}{a\,\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial K}{\partial y}+$$
$$+Fr\left[\begin{array}{l}\left(\frac{K}{\Omega}\right)\left(2\frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F_1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 F_3}{\partial y\partial z}\right)+\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{K}{\Omega}\right)+\\+\left(\frac{\partial F_2}{\partial z}+\frac{\partial F_3}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{K}{\Omega}\right)\end{array}\right], \quad (19)$$

$$F_1\frac{\partial F_3}{\partial x}+F_2\frac{\partial F_3}{\partial y}+F_3\frac{\partial F_3}{\partial z}=-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{d_{\acute{y}\hat{e}\hat{a}}}{a\,\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F_3}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F_3}{\partial z^2}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial K}{\partial z}+$$
$$+Fr\left[\begin{array}{l}\left(\frac{K}{\Omega}\right)\left(2\frac{\partial^2 F_3}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F_1}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 F_3}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F_2}{\partial y\partial z}\right)+\left(\frac{\partial F_3}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{K}{\Omega}\right)+\\+\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}+\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{K}{\Omega}\right)\end{array}\right]; \quad (20)$$

неразрывности:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}=0; \quad (21)$$

энергии:

$$F_1\frac{\partial T}{\partial x}+F_2\frac{\partial T}{\partial y}+F_3\frac{\partial T}{\partial z}=\frac{1}{DPe_t}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right); \quad (22)$$

где $Pe_t=u_0\frac{d_{\acute{y}\hat{e}\hat{a}}}{(a+a_t)}$ – число Пекле, $D=\frac{d_{\acute{y}\hat{e}\hat{a}}}{d}$;

теплопроводности для стенок канала:

$$\frac{\partial^2 T_{\tilde{n}}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T_{\tilde{n}}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T_{\tilde{n}}}{\partial z^2}=0; \quad (23)$$

турбулентной кинетической энергии:

$$F_1\frac{\partial k}{\partial x}+F_2\frac{\partial k}{\partial y}+F_3\frac{\partial k}{\partial z}=-\frac{2}{3}K\left(\frac{\partial \bar{n}_1}{\partial x_1}+\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_2}+\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_3}\right)-$$
$$-Fr\frac{K}{\Omega}\left[\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial x}+2\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial F_3}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{\partial F_3}{\partial y}+\frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{\partial F_3}{\partial y}\right]+$$
$$+2Fr\frac{K}{\Omega}\left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F_3}{\partial z}\right)^2\right]+$$
$$+Fr\frac{K}{\Omega}\left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial F_3}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}\right)^2\right]- \quad (24)$$
$$-\frac{b^*}{Fr}+\left(\frac{d_{\acute{y}\hat{e}\hat{a}}}{a\,\mathrm{Re}}+\frac{K}{\Omega}\right)\left(\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 K}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 K}{\partial z^2}\right)+$$
$$Fr\left[\frac{\partial K}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{K}{\Omega}\right)+\frac{\partial K}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{K}{\Omega}\right)+\frac{\partial K}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{K}{\Omega}\right)\right];$$

удельной скорости диссипации турбулентной энергии:

$$F_1\frac{\partial\Omega}{\partial x}+F_2\frac{\partial\Omega}{\partial y}+F_3\frac{\partial\Omega}{\partial z}=-\frac{b}{Fr}-\frac{2}{3}K\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_2}{\partial x_2}+\frac{\partial F_3}{\partial x_3}\right)+$$
$$+a\,Fr\left[\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial x}+2\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial F_3}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial x}+2\frac{\partial F_3}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial z}+\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial F_3}{\partial x}+\right]+$$
$$+2a\,Fr\left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F_3}{\partial z}\right)^2\right]+a\,Fr\left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial F_3}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}\right)^2\right]+ \qquad (25)$$
$$+\left(\frac{d_{\acute{y}\hat{e}\hat{a}}}{a\,\mathrm{Re}}+Fr\frac{K}{\Omega}\right)\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}\right)+Fr\left[\frac{\partial\Omega}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{K}{\Omega}\right)+\frac{\partial\Omega}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{K}{\Omega}\right)+\frac{\partial\Omega}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{K}{\Omega}\right)\right].$$

Граничные условия

на входе: $F_1=0$, $F_2=0$, $F_3=1$, $T=1$, $T_c=1$, $K=K_0$, $\Omega=\Omega_0$;

на выходе: $\frac{\partial F_1}{\partial z}=0$, $\frac{\partial F_2}{\partial z}=0$, $\frac{\partial F_3}{\partial z}=0$, $\frac{\partial T}{\partial z}=0$, $\frac{\partial K}{\partial z}=0$, $\frac{\partial\Omega}{\partial z}=0$;

на границе жидкости и твердой стенки: $F_1=0$, $F_2=0$, $F_3=0$, $T=T_c, K=0$, $\lambda\frac{\partial T}{\partial \vec{n}}=\lambda_c\frac{\partial T_c}{\partial \vec{n}}$;

на границе внешней стенки и теплоносителя: $\left|\frac{\partial T_{\tilde{n}}}{\partial \vec{n}}\right|=Bi\left(T_0-T_c\right)$.

Разработана математическая модель гидродинамических и теплообменных процессов закрученных турбулентных течений несжимаемой жидкости в пружинно-витых каналах. Численная реализация предложенной модели позволит определить поле скоростей, давления и температур в проточной части пружинно-витых каналах и уточнить методику инженерных расчетов теплообменных аппаратов.

Список литературы

1. Патент РФ № 62694 на полезную модель.Теплообменный элемент / Золотоносов А.Я., Золотоносов Я.Д., Конахина И.А. № 2006143517/23, заявл. 07.19.06; Бюл. 12. – С. 7.
2. Патент РФ № 64750 на полезную модель.Теплообменный элемент / Золотоносов Я.Д, Осыка И.Н., Никулин В.А., Фомин Н.А. № 2011112666/06, заявл. 01.04.11; Бюл. – С. 11-28.
3. Патент РФ № 11382 на полезную модель.Теплообменный элемент / Золотоносов Я.Д., Мустакимова С.А., Осыка И.Н., Никулин В.А. № 2011127714/06, заявл. 06.07.11; Бюл. 6. – С. 5.
4. Багоутдинова А.Г., Золотоносов Я.Д., Мустакимова С.А. Геометрическое моделирование сложных поверхностей пружинно-витых каналов теплообменных устройств//Известия КГАСУ, 2011, № 4 (18). – С. 185-193.
5. Багоутдинова А.Г., Золотоносов Я.Д., Мустакимова С.А. Моделирование турбулентных течений в прямых пружинно-витых каналах // Известия КГАСУ, 2011, № 1 (19). – С. 81-88.
6. Багоутдинова А.Г., Золотоносов Я.Д., Мустакимова С.А. Математическое моделирование гидродинамики и теплообмена при турбулентном течении в пружинно-витых каналах // Проблемы энергосбережения и экологии в промышленном и жилищно-коммунальном комплексах. Сб. тр. – Пенза, 2012. – С. 21-25.
7. Лойцянский Л.И. Механика жидкости и газа. Изд. 6-е. – М.: Наука, 1987.
8. Q. Xiao, M. Tsai, F. Liu. Computation of transonic diffuser flows by a lagged $k-w$ turbulence model // Journal of propulsion and power, vol.19, № 3, may-june 2003. – P. 473-483.

Mustakimova S.A. – the leading programmer
E-mail: mustakim@kgasu.ru
Kazan State University of Architecture and Engineering
The organization address: 420043, Russia, Kazan, Zelenaya st., 1

Mathematical modeling of hydrodynamics and heat transfer of swirling currents in the spring-twisted channels

Resume

This article focuses on the mathematical modeling of turbulent flow of Newtonian fluid in a spring-twisted channels. The model equations are the Navier-Stokes equations, Reynolds averaged, energy and the heat conduction equation of the channel walls. To close the system of equations is chosen two-parameter model that allows to get an idea of the twist of the flow in the channels.

The system of equations by a series of substitutions, transformed into a dimensionless form, which facilitates the numerical implementation.

Numerical implementation of the developed mathematical model of hydrodynamic and heat transfer processes of turbulent swirling flow of an incompressible fluid in a spring-twisted channels will determine the velocity field, pressure and temperature in the flow of spring-twisted channels and to clarify the methods of engineering calculations of heat exchangers.

Keywords: mathematical modeling, turbulent movement, spring-twisted-channel.

References

1. Zolotonosov A.J., Zolotonosov Ja.D., Konahina I.A. Teploobmennyj an element: the patent 62694 Russian Federation. № 2006143517/23; it is published 10.07.07. The bulletin № 12. – P. 7.
2. Zolotonosov Ja.D., Osyka, I.N. Nikutin V.A., Fomin N.A. Teploobmennyj an element: the patent 64750 Russian Federation. № 2011112666/06; it is published 10.07.07. The bulletin № 28. – P. 11.
3. Zolotonosov Ja.D., Mustakimova S.A., Osyka I.N., Nikutin V.A. Teploobmennyj an element: the patent 11382 Russian Federation. № 2011127714/06; it is published 06.07.11. The bulletin № 6. – 5 p.
4. Bagoutdinova A.G., Zolotonosov Ya.D., Mustakimova S.A. Geometrical modelling of difficult surfaces of spring-twisted channels of heat-exchange devices // News of the KSUAE, 2011, № 4 (18). – P. 185-193.
5. Bagoutdinova A.G, Zolotonosov J.D., Mustakimova S.A Simulation of a turbulent flow in a direct spring-twisted channels Modelling of turbulent flow in straight line spring-twisted channels// News of the KSUAE. № 1 (19). - Kazan, 2012. – P. 81-88.
6. Bagoutdinova A.G., Zolotonosov Ya.D., Mustakimova S.A. Mathematical modeling of hydrodynamics and heat transfer in a turbulent flow in a spring-twisted channels // Problems of energy saving and ecology in industrial and housing-and-municipal complexes. – Penza, 2012. – P. 21-25.
7. Loicanskii L.I. Fluid mechanic. Izd. 6-e, – M.: Nauka, 1987.
8. Q. Xiao, M. Tsai, F. Liu. Computation of transonic diffuser flows by a lagged $k-w$ turbulence model // Journal of propulsion and power, vol. 19, № 3, may-june 2003. – P. 473-483.