

УДК 539.3

**Христич Д.В.** – кандидат физико-математических наук, доцент  
E-mail: [dmitrykhristich@rambler.ru](mailto:dmitrykhristich@rambler.ru)**Тульский государственный университет**

Адрес организации: 300012, Россия, г. Тула, проспект Ленина, д. 92

**Каюмов Р.А.** – доктор физико-математических наук, профессор  
E-mail: [kayumov@mail.ru](mailto:kayumov@mail.ru)**Мухамедова И.З.** – кандидат физико-математических наук, доцент  
E-mail: [muhamedova-inzilija@mail.ru](mailto:muhamedova-inzilija@mail.ru)**Казанский государственный архитектурно-строительный университет**

Адрес организации: 420043, Россия, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1

### Программа экспериментов по определению главных осей анизотропии материала\*

#### Аннотация

Предложена программа экспериментов, необходимых для определения главных осей анизотропии кристаллических материалов. Рассмотрены материалы, не чувствительные к виду напряжённого состояния, и предположим, что соотношения, связывающие тензоры напряжений и деформаций, при стремлении деформаций к нулю асимптотически приближаются к закону Гука. Разработанная программа состоит из трёх экспериментов на одноосное сжатие. Предложена модификация указанной программы экспериментов, которая позволяет выполнить все необходимые опыты.

**Ключевые слова:** упругие свойства, анизотропные материалы, эксперимент.

Будем рассматривать материалы, не чувствительные к виду напряжённого состояния, и предположим, что соотношения, связывающие тензоры напряжений и деформаций, при стремлении деформаций к нулю асимптотически приближаются к закону Гука.

Деформируемые твёрдые тела при малых деформациях проявляют свойство упругости. При этом напряжения зависят от деформаций линейно, и эта зависимость описывается законом Гука:

$$S = N \cdot \epsilon, \quad (1)$$

где  $S$  – тензор истинных напряжений Коши,  $N$  – постоянный тензор упругих свойств (тензор упругости) четвёртого ранга,  $\epsilon$  – тензор деформаций Коши-Грина.

Аналізу структуры и свойств тензора  $N$  посвящены многочисленные работы [1-11 и др.]. Этот анализ показывает, что тензор  $N$  обладает симметрией:

$N_{ijkl} = N_{jikl} = N_{ijlk} = N_{klij}$  – и поэтому имеет 21 независимую компоненту. Такое количество независимых компонент характерно для кристаллов, относящихся к триклинной сингонии [1]. Другие кристаллографические системы имеют некоторое количество элементов симметрии, поэтому тензор  $N$  имеет меньшее число независимых компонент: от 2 для изотропного и гиротропного материалов до 13 для моноклинного [12].

Актуальной является задача разработки программы минимального числа экспериментов по определению компонент тензора  $N$ . В работе Я.К. Рыхлевского [2] доказано, что для нахождения 21 компоненты тензора упругости в общем случае требуется провести 15 экспериментов на одномерное нагружение и 6 экспериментов на двумерное нагружение.

Однако если известны тип и ориентация главных осей анизотропии материала, то число экспериментов, необходимых для определения констант упругости, сокращается. В монографии [12] предложена программа экспериментов, с помощью которой можно провести классификацию материалов по кристаллографическим системам. Эта программа предполагает проведение от двух до четырёх экспериментов с макрообразцами: 1) нагружение гидростатическим давлением (всестороннее сжатие); 2) растяжение и сжатие одинаковыми усилиями в двух взаимно перпендикулярных

\* Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (проект 2012-1.4-12-000-1004-006).

направлениях, задаваемых главными осями анизотропии; 3) сдвиги в плоскостях, определяемых главными осями анизотропии. В результате эксперимента по всестороннему сжатию определяют главные значения  $e_1, e_2, e_3$  и главные векторы  $a_1, a_2, a_3$  тензора деформаций  $e$ . Знание типа анизотропии материала и ориентации главных осей анизотропии позволяет сократить число одномерных и двумерных экспериментов, необходимых для нахождения компонент тензора упругости для материалов всех сингоний кроме триклинной.

Существенная трудность реализации указанной программы экспериментов состоит в необходимости проведения трёхосного эксперимента – первого в программе. При выполнении такого опыта не представляется возможным измерить изменение размеров образца для определения по ним шести компонент тензора деформаций.

Целью настоящей работы является разработка такой модификации указанной программы экспериментов, которая позволяет выполнить все необходимые опыты.

При всестороннем сжатии образца тензор напряжений имеет вид  $S = -S \cdot E$ , где  $E = d_{ij} e_i e_j$  – единичный тензор в декартовой системе координат  $Oxyz$  (далее будем работать в этой системе). Этот тензор напряжений можно представить в виде суммы трёх тензоров:

$$S = S_I + S_{II} + S_{III}, \quad (2)$$

где  $S_I = -S e_1 e_1$ ,  $S_{II} = -S e_2 e_2$ ,  $S_{III} = -S e_3 e_3$ , каждый из которых описывает сжатие вдоль одной из осей координат. Каждому тензору напряжений  $S_I, S_{II}, S_{III}$  соответствует тензор деформаций  $\varepsilon_I, \varepsilon_{II}, \varepsilon_{III}$ , связанный с ним законом Гука (1):

$$\begin{aligned} S_I &= N \cdot e_I \\ S_{II} &= N \cdot e_{II} \\ S_{III} &= N \cdot e_{III}. \end{aligned} \quad (3)$$

В силу линейности закона Гука с учётом формулы (2), складывая уравнения (3), получим:

$$S = S_I + S_{II} + S_{III} = N \cdot (e_I + e_{II} + e_{III}) \quad (4)$$

Аддитивность представления (4) позволяет заменить опыт по всестороннему сжатию тремя экспериментами по одноосному сжатию, провести которые гораздо проще.

Если выполнить три таких одноосных эксперимента, то главные оси анизотропии материала можно будет определить как главные оси тензора деформаций  $\varepsilon = \varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III}$ , который описывает отклик образца на всестороннее сжатие.

Рассмотрим эксперимент по одноосному сжатию вдоль произвольной оси  $Oz$  куба  $OABCO_1A_1B_1C_1$ , занимающего в недеформированном состоянии область  $\{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a\}$  (рис. 1).

В деформированном состоянии куб станет косоугольным параллелепипедом  $O''A''B''C''O''_1A''_1B''_1C''_1$  (рис. 2).

Положение нижней плоскости образца в таком эксперименте фиксировано, и его ориентация как твёрдого тела определяется одним параметром – углом поворота образца вокруг нормали к этой плоскости. Поэтому деформация и ориентация образца определяются семью параметрами, измеряемыми в эксперименте (рис. 3, 4): длины рёбер оснований  $c_1, c_2$ , углы  $g_1, g_2$  между сторонами деформированных и исходных нижнего и верхнего оснований, компоненты  $\Delta x_{III}, \Delta y_{III}, \Delta z_{III}$  вектора перемещения верхнего основания относительно нижнего.

Координаты точек нижнего и верхнего оснований куба в деформированном состоянии выражаются через эти семь параметров:

$$O''(0; 0; 0),$$

$$A''(c_1 \cos g_1; c_1 \sin g_1; 0),$$

$$B'''(c_1 \cos g_1 + c_2 \sin g_2; c_1 \sin g_1 + c_2 \cos g_2; 0),$$

$$C'''(c_2 \sin g_2; c_2 \cos g_2; 0);$$

$$O'''_1(\Delta x_{III}; \Delta y_{III}; a - \Delta z_{III}),$$

$$A'''_1(c_1 \cos g_1 + \Delta x_{III}; c_1 \sin g_1 + \Delta y_{III}; a - \Delta z_{III}),$$

$$B'''_1(c_1 \cos g_1 + c_2 \sin g_2 + \Delta x_{III}; c_1 \sin g_1 + c_2 \cos g_2 + \Delta y_{III}; a - \Delta z_{III}),$$

$$C'''_1(c_2 \sin g_2 + \Delta x_{III}; c_2 \cos g_2 + \Delta y_{III}; a - \Delta z_{III}).$$

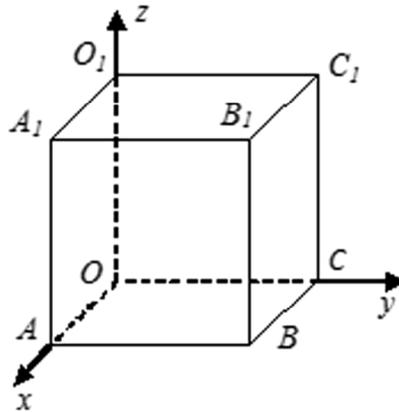


Рис. 1. Куб в недеформированном состоянии

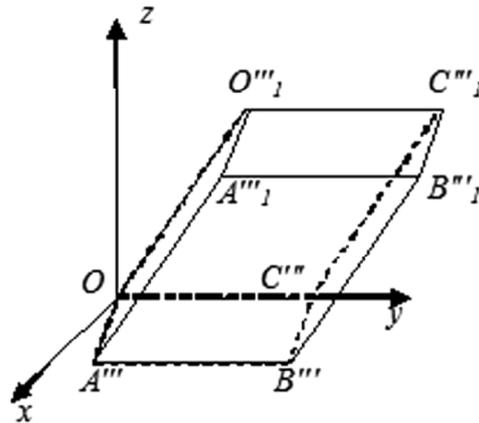


Рис. 2. Исходный куб в деформированном состоянии

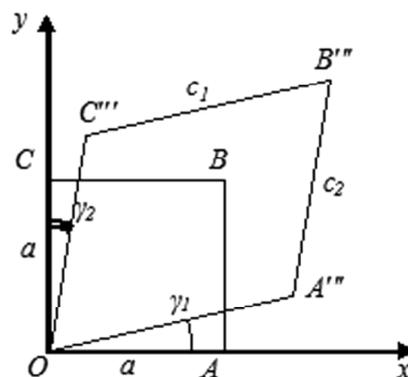


Рис. 3. Нижнее основание куба в исходном и деформированном состояниях  
при сжатии вдоль оси  $Oz$

Считаем, что перемещения в силу однородности деформированного состояния линейно зависят от координат:

$$\mathbf{r} u_{III} = \left[ \left( \frac{c_1 \cos g_1}{a} - 1 \right) x + \frac{c_2 \sin g_2}{a} y + \Delta x_{III} \frac{z}{a} \right] \mathbf{r}_1 +$$

$$+ \left[ \frac{c_1 \sin g_1}{a} x + \left( \frac{c_2 \cos g_2}{a} - 1 \right) y + \Delta y_{III} \frac{z}{a} \right] \mathbf{r}_2 - \Delta z_{III} \frac{z}{a} \mathbf{r}_3$$

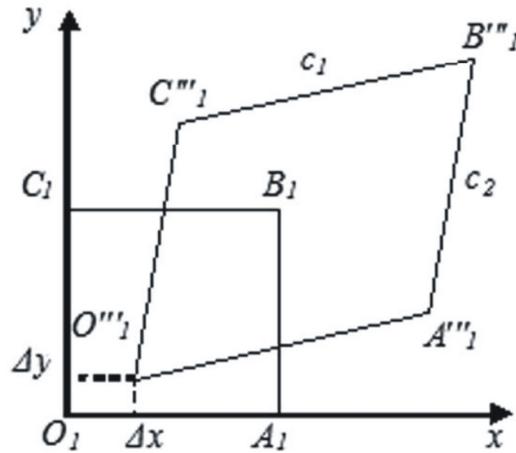


Рис. 4. Верхнее основание куба в исходном и деформированном состояниях при сжатии вдоль оси  $Oz$

Тогда линейризованный тензор деформаций  $\epsilon_{III} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{III}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{III}}{\partial x_i} \right) \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j$  имеет

следующие компоненты:

$$e_{ij}^{III} = \begin{pmatrix} \frac{c_1 \cos g_1}{a} - 1 & \frac{c_1 \sin g_1 + c_2 \sin g_2}{2a} & \frac{\Delta x_{III}}{2a} \\ \frac{c_1 \sin g_1 + c_2 \sin g_2}{2a} & \frac{c_2 \cos g_2}{a} - 1 & \frac{\Delta y_{III}}{2a} \\ \frac{\Delta x_{III}}{2a} & \frac{\Delta y_{III}}{2a} & -\frac{\Delta z_{III}}{a} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Если углы  $g_1, g_2$  малы, то есть  $g_1 \approx 0, g_2 \approx 0$ , то компоненты тензора  $e_{ij}^{III}$  можно линейризовать, считая  $\cos g_k \approx 1, \sin g_k \approx g_k, k = 1, 2$ . Получим:

$$\hat{e}_{ij}^{III} = \begin{pmatrix} \frac{c_1}{a} - 1 & \frac{c_1 g_1 + c_2 g_2}{2a} & \frac{\Delta x_{III}}{2a} \\ \frac{c_1 g_1 + c_2 g_2}{2a} & \frac{c_2}{a} - 1 & \frac{\Delta y_{III}}{2a} \\ \frac{\Delta x_{III}}{2a} & \frac{\Delta y_{III}}{2a} & -\frac{\Delta z_{III}}{a} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Если, кроме того, считать, что  $c_1 \approx a$  и  $c_2 \approx a$ , то компоненты тензора  $e_{ij}^{III}$  примут вид:

$$\hat{e}_{ij}^{III} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{g_1 + g_2}{2} & \frac{\Delta x_{III}}{2a} \\ \frac{g_1 + g_2}{2} & 0 & \frac{\Delta y_{III}}{2a} \\ \frac{\Delta x_{III}}{2a} & \frac{\Delta y_{III}}{2a} & -\frac{\Delta z_{III}}{a} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Координаты точек задней и передней грани куба выражаются через измеряемые в опыте длины рёбер в деформированном состоянии  $a_1, a_2$ , углы  $\alpha_1, \alpha_2$  между сторонами деформированных и исходных задней и передней грани и перемещения передней грани относительно задней  $\Delta x_I, \Delta y_I, \Delta z_I$ :

$$O'(0; 0; 0),$$

$$C'(0; a_1 \cos \alpha_1; a_1 \sin \alpha_1),$$

$$C'_1(0; a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2; a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2),$$

$$O'_1(0; a_2 \sin \alpha_2; a_2 \cos \alpha_2);$$

$$A'(a - \Delta x_I; \Delta y_I; \Delta z_I),$$

$$B'(a - \Delta x_I; a_1 \cos \alpha_1 + \Delta y_I; a_1 \sin \alpha_1 + \Delta z_I),$$

$$B'_1(a - \Delta x_I; a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + \Delta y_I; a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + \Delta z_I),$$

$$A'_1(a - \Delta x_I; a_2 \sin \alpha_2 + \Delta y_I; a_2 \cos \alpha_2 + \Delta z_I)$$

Поле перемещений в этом случае определяется вектором:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{u_I} = & -\Delta x_I \frac{x}{a} \mathbf{r}_1 + \left[ \Delta y_I \frac{x}{a} + \left( \frac{a_1 \cos \alpha_1}{a} - 1 \right) y + \frac{a_2 \sin \alpha_2}{a} z \right] \mathbf{r}_2 + \\ & + \left[ \Delta z_I \frac{x}{a} + \frac{a_1 \sin \alpha_1}{a} y + \left( \frac{a_2 \cos \alpha_2}{a} - 1 \right) z \right] \mathbf{r}_3 \end{aligned}$$

Компоненты тензора деформаций Коши-Грина при сжатии куба вдоль оси  $Ox$  имеют вид:

$$e_{ij}^I = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta x_I}{a} & \frac{\Delta y_I}{2a} & \frac{\Delta z_I}{2a} \\ \frac{\Delta y_I}{2a} & \frac{a_1 \cos \alpha_1}{a} - 1 & \frac{a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2}{2a} \\ \frac{\Delta z_I}{2a} & \frac{a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2}{2a} & \frac{a_2 \cos \alpha_2}{a} - 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Проводя линеаризацию компонент  $e_{ij}^I$  (8), получим выражения, аналогичные формулам (6), (7):

$$\hat{e}_{ij}^I = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta x_I}{a} & \frac{\Delta y_I}{2a} & \frac{\Delta z_I}{2a} \\ \frac{\Delta y_I}{2a} & \frac{a_1}{a} - 1 & \frac{a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2}{2a} \\ \frac{\Delta z_I}{2a} & \frac{a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2}{2a} & \frac{a_2}{a} - 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_{ij}^I = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta x_I}{a} & \frac{\Delta y_I}{2a} & \frac{\Delta z_I}{2a} \\ \frac{\Delta y_I}{2a} & 0 & \frac{a_1 + a_2}{2} \\ \frac{\Delta z_I}{2a} & \frac{a_1 + a_2}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Координаты точек левой и правой грани куба выражаются через измеряемые в опыте длины рёбер в деформированном состоянии  $b_1, b_2$ , углы  $b_1, b_2$  между сторонами деформированных и исходных левой и правой грани и перемещения правой грани относительно левой:

$$O''(0; 0; 0),$$

$$A''(b_1 \cos b_1; 0; b_1 \sin b_1),$$

$$A''_1(b_1 \cos b_1 + b_2 \sin b_2; 0; b_1 \sin b_1 + b_2 \cos b_2),$$

$$O''_1(b_2 \sin b_2; 0; b_2 \cos b_2);$$

$$C''(\Delta x_{II}; a - \Delta y_{II}; \Delta z_{II}),$$

$$B''(b_1 \cos b_1 + \Delta x_{II}; a - \Delta y_{II}; b_1 \sin b_1 + \Delta z_{II}),$$

$$B''_1(b_1 \cos b_1 + b_2 \sin b_2 + \Delta x_{II}; a - \Delta y_{II}; b_1 \sin b_1 + b_2 \cos b_2 + \Delta z_{II}),$$

$$C''_1(b_2 \sin b_2 + \Delta x_{II}; a - \Delta y_{II}; b_2 \cos b_2 + \Delta z_{II}).$$

Поле перемещений при сжатии куба вдоль оси  $Oy$  описывается вектором

$$\mathbf{r}_{u_{II}} = \left[ \left( \frac{b_1 \cos b_1}{a} - 1 \right) x + \Delta x_{II} \frac{y}{a} + \frac{b_2 \sin b_2}{a} z \right] \mathbf{r}_1 - \Delta y_{II} \frac{y}{a} \mathbf{r}_2 + \left[ \frac{b_1 \sin b_1}{a} x + \Delta z_{II} \frac{y}{a} + \left( \frac{b_2 \cos b_2}{a} - 1 \right) z \right] \mathbf{r}_3.$$

а тензор деформаций Коши-Грина имеет следующие компоненты:

$$\mathbf{e}_{ij}^{II} = \begin{pmatrix} \frac{b_1 \cos b_1}{a} - 1 & \frac{\Delta x_{II}}{2a} & \frac{b_1 \sin b_1 + b_2 \sin b_2}{2a} \\ \frac{\Delta x_{II}}{2a} & -\frac{\Delta y_{II}}{a} & \frac{\Delta z_{II}}{2a} \\ \frac{b_1 \sin b_1 + b_2 \sin b_2}{2a} & \frac{\Delta z_{II}}{2a} & \frac{b_2 \cos b_2}{a} - 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Проводя линеаризацию компонент  $e_{ij}^{II}$  (11), получим выражения, аналогичные формулам (6), (7):

$$\hat{\mathbf{e}}_{ij}^{II} = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a} - 1 & \frac{\Delta x_{II}}{2a} & \frac{b_1 b_1 + b_2 b_2}{2a} \\ \frac{\Delta x_{II}}{2a} & -\frac{\Delta y_{II}}{a} & \frac{\Delta z_{II}}{2a} \\ \frac{b_1 b_1 + b_2 b_2}{2a} & \frac{\Delta z_{II}}{2a} & \frac{b_2}{a} - 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\hat{e}_{ij}^{II} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Delta x_{II}}{2a} & \frac{b_1 + b_2}{2} \\ \frac{\Delta x_{II}}{2a} & -\frac{\Delta y_{II}}{a} & \frac{\Delta z_{II}}{2a} \\ \frac{b_1 + b_2}{2} & \frac{\Delta z_{II}}{2a} & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Тогда тензор деформаций  $\epsilon$  имеет компоненты  $e_{ij} = e_{ij}^I + e_{ij}^{II} + e_{ij}^{III}$ :

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{-\Delta x_I + c_1 \cos g_1 + b_1 \cos b_1}{a} - 2 & \frac{\Delta x_{II} + \Delta y_I + c_1 \sin g_1 + c_2 \sin g_2}{2a} & \frac{\Delta x_{III} + \Delta z_I + b_1 \sin b_1 + b_2 \sin b_2}{2a} \\ \frac{\Delta x_{II} + \Delta y_I + c_1 \sin g_1 + c_2 \sin g_2}{2a} & \frac{-\Delta y_{II} + c_2 \cos g_2 + a_1 \cos a_1}{a} - 2 & \frac{\Delta y_{III} + \Delta z_{II} + a_1 \sin a_1 + a_2 \sin a_2}{2a} \\ \frac{\Delta x_{III} + \Delta z_I + b_1 \sin b_1 + b_2 \sin b_2}{2a} & \frac{\Delta y_{III} + \Delta z_{II} + a_1 \sin a_1 + a_2 \sin a_2}{2a} & \frac{-\Delta z_{III} + b_2 \cos b_2 + a_2 \cos a_2}{a} - 2 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Для выполнения предварительного анализа результатов эксперимента матрицу компонент тензора деформаций (14) удобно представить в виде:

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta x_I}{a} & \frac{\Delta x_{II} + \Delta y_I}{2a} & \frac{\Delta x_{III} + \Delta z_I}{2a} \\ \frac{\Delta x_{II} + \Delta y_I}{2a} & -\frac{\Delta y_{II}}{a} & \frac{\Delta y_{III} + \Delta z_{II}}{2a} \\ \frac{\Delta x_{III} + \Delta z_I}{2a} & \frac{\Delta y_{III} + \Delta z_{II}}{2a} & -\frac{\Delta z_{III}}{a} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{c_1 \cos g_1 + b_1 \cos b_1}{a} - 2 & \frac{c_1 \sin g_1 + c_2 \sin g_2}{2a} & \frac{b_1 \sin b_1 + b_2 \sin b_2}{2a} \\ \frac{c_1 \sin g_1 + c_2 \sin g_2}{2a} & \frac{c_2 \cos g_2 + a_1 \cos a_1}{a} - 2 & \frac{a_1 \sin a_1 + a_2 \sin a_2}{2a} \\ \frac{b_1 \sin b_1 + b_2 \sin b_2}{2a} & \frac{a_1 \sin a_1 + a_2 \sin a_2}{2a} & \frac{b_2 \cos b_2 + a_2 \cos a_2}{a} - 2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Если параллелепипед после деформации остаётся прямоугольным, то во втором слагаемом ненулевыми будут только диагональные компоненты матрицы.

При линеаризации тензор деформаций  $\epsilon$  имеет следующие компоненты:

$$\hat{e}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{-\Delta x_I}{a} & \frac{\Delta x_{II} + \Delta y_I}{2a} + \frac{g_1 + g_2}{2} & \frac{\Delta x_{III} + \Delta z_I}{2a} + \frac{b_1 + b_2}{2} \\ \frac{\Delta x_{II} + \Delta y_I}{2a} + \frac{g_1 + g_2}{2} & -\frac{\Delta y_{II}}{a} & \frac{\Delta y_{III} + \Delta z_{II}}{2a} + \frac{a_1 + a_2}{2} \\ \frac{\Delta x_{III} + \Delta z_I}{2a} + \frac{b_1 + b_2}{2} & \frac{\Delta y_{III} + \Delta z_{II}}{2a} + \frac{a_1 + a_2}{2} & -\frac{\Delta z_{III}}{a} \end{pmatrix} \quad (16)$$

или:

$$\hat{e}_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta x_I}{a} & \frac{\Delta x_{II} + \Delta y_I}{2a} & \frac{\Delta x_{III} + \Delta z_I}{2a} \\ \frac{\Delta x_{II} + \Delta y_I}{2a} & -\frac{\Delta y_{II}}{a} & \frac{\Delta y_{III} + \Delta z_{II}}{2a} \\ \frac{\Delta x_{III} + \Delta z_I}{2a} & \frac{\Delta y_{III} + \Delta z_{II}}{2a} & -\frac{\Delta z_{III}}{a} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{g_1 + g_2}{2} & \frac{b_1 + b_2}{2} \\ \frac{g_1 + g_2}{2} & 0 & \frac{a_1 + a_2}{2} \\ \frac{b_1 + b_2}{2} & \frac{a_1 + a_2}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Главные оси тензора (14) являются главными осями анизотропии материала. Направления главных осей задаются единичными собственными векторами  $\mathbf{a}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  тензора  $\varepsilon$ , которые определяются из условия  $\varepsilon \cdot \mathbf{a}_i = \varepsilon \mathbf{a}_i$ , где  $\varepsilon_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  – собственные значения тензора  $\varepsilon$ . Для нахождения собственных значений тензора  $\varepsilon$  используется характеристическое уравнение:

$$e^3 - I_1(e)e^2 + I_2(e)e - I_3(e) = 0,$$

где  $I_1(e)$ ,  $I_2(e)$ ,  $I_3(e)$ , – алгебраические инварианты тензора  $e$ .

### Список литературы

1. Рыхлевский Я.К. «СЕПНОССТТУУ» Математическая структура упругих тел / Препринт № 217. – М.: ИПМ АН СССР, 1983. – 113 с.
2. Rychlewski Y.K. On the detectability of constitutive laws in solid mechanics and physics / Упругость и неупругость: Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых твёрдых тел, посвящённого девяностолетию со дня рождения А.А. Ильюшина (Москва, 22-23 января 2001 года) / Под ред. проф. И.А. Кийко, проф. М.Ш. Исраилова, проф. Г.Л. Бровко. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001. – С. 67-73.
3. Рыхлевский Я.К. О законе Гука // Прикладная математика и механика, 1984, Т. 48. – Вып. 3. – С. 420-435.
4. Аннин Б.Д., Остросаблин Н.И. Анизотропия упругих свойств материалов // Прикладная механика и техническая физика, 2008, Т. 49, № 6. – С. 131-151.
5. Остросаблин Н.И. О структуре тензора модулей упругости. Собственные упругие состояния // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики, 1984, Вып. 66. – С. 113-125.
6. Остросаблин Н.И. О классификации анизотропных материалов // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики, 1985, Вып. 71. – С. 82-96.
7. Бехтерев П.В. Аналитическое исследование обобщённого закона Гука // Сообщ. о науч.-техн. работах в Респ. – Л.: Науч. хим.-техн. изд-во, 1924, Вып. 12. – С. 20-23.
8. Бехтерев П.В. Аналитическое исследование обобщённого закона Гука // Сообщ. о науч.-техн. работах в Респ. – Л.: Науч. хим.-техн. изд-во, 1925, Вып. 17. – С. 5-9.
9. Маркин А.А., Соколова М.Ю. Вариант определяющих соотношений нелинейной термоупругости для анизотропных тел // Прикладная механика и техническая физика, 2003, Т. 44, № 1. – С. 170-175.
10. Соколова М.Ю. Структурные тензоры анизотропии в пространстве А.А. Ильюшина // Известия ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика, 2001, Т. 7, Вып. 2, Механика. – С. 173-178.
11. Маркин А.А., Соколова М.Ю., Христич Д.В. Постулат А.А. Ильюшина для анизотропных материалов и вариант определяющих соотношений // Известия РАН. Механика твёрдого тела, 2011, № 1. – С. 38-45.
12. Маркин А.А., Соколова М.Ю. Термомеханические модели обратимого конечного деформирования. – Тула, 2010. – 268 с.

**Khristich D.V.** – candidate of physical-mathematical sciences, associate professor  
E-mail: [dmitrykhristich@rambler.ru](mailto:dmitrykhristich@rambler.ru)

#### Tula State University

The organization address: 300012, Russia, Tula, Pr. Lenina, 92

**Kayumov R.A.** – doctor of physical-mathematical sciences, professor

E-mail: [kayumov@rambler.ru](mailto:kayumov@rambler.ru)

**Muhamedova I.Z.** – candidate of physical-mathematical sciences, associate professor

E-mail: [muhamedova-inzilija@mail.ru](mailto:muhamedova-inzilija@mail.ru)

#### Kazan State University of Architecture and Engineering

The organization address: 420043, Russia, Kazan, Zelenaya st., 1

## A program of experiments for material anisotropy main axes determination

### Resume

Offered a program of experiments needed to determine the principal axes of anisotropy of crystalline materials. Considered materials are not sensitive to the stress state and relations between the stress and strain tensors approach to Hooke's law when strain tends to zero asymptotically. To reduce the number of experiments it is necessary to know the orientation of the principal axes of the anisotropic material. Principal axes of the anisotropic material are the principal axes of strain tensor, which describes the response of the sample to the hydrostatic compression. During the test the change in size of the sample is measured to determine the components of the strain tensor.

The developed program consists of three experiments uniaxial compression. In this paper is offered a modification of this experimental program, which allows you to perform all required tests. The experiment on the uniform compression define the main vectors of the strain tensor. Knowing the type of material anisotropy and orientation of the principal axes of anisotropy can reduce the number of one-and two-dimensional experiments required to find the components of the tensor of elasticity for all materials except the triclinic crystal systems.

**Keywords:** elastic properties, anisotropic materials, experiment.

### References

1. Rychlewski Y.K. «СЕИИНОССТТУВ» Mathematical structure of elastic bodies / Preprint № 217, 1983. – 113 p.
2. Rychlewski Y.K. On the detectability of constitutive laws in solid mechanics and physics / Elasticity and nonelasticity: Proceedings of the International scientific symposium on the mechanics of deformable solids, dedicated to A.A.Ilyushin ninetieth birthday (Moscow, 22-23 of January 2001) / Under the editorship of prof. I.A. Kiyko, prof. M.Sh. Israilova, prof. G.L. Brovko. – M.: Moscow University Publishers, 2001. – P. 67-73.
3. Rychlewski Y.K. About Hooke's law // Applied mathematics and mechanics, 1984, V. 48, Issue 3. – P. 420-435.
4. Annin B.D., Ostrosablin N.I. Anisotropy of elastic properties of materials // Applied mechanics and technical physics, 2008, V. 49, № 6. – P. 131-151.
5. Ostrosablin N.I. About the structure of elastic moduli tensor. Eigen elastic states // Dynamics of continuum medium: Collection of scientific papers / USSR Academy of Sciences. Siberian Branch. Institute of hydrodynamics, 1984, Issue 66. – P. 113-125.
6. Ostrosablin N.I. About classification of anisotropic materials // Dynamics of continuum medium: Collection of scientific papers / USSR Academy of Sciences. Siberian Branch. Institute of hydrodynamics, 1985, Issue 71. – P. 82-96.
7. Bekhterev P.V. Analytic investigation of generalized Hooke's law // Message of scientific and engineering works in Republic. L.: Scientific him.-techn. Publishers, 1924, Issue 12. – P. 20-23.
8. Bekhterev P.V. Analytic investigation of generalized Hooke's law // Message of scientific and engineering works in Republic. L.: Scientific him.-techn. Publishers, 1925, Issue 17. – P. 5-9.
9. Markin A.A., Sokolova M.Yu. A variant of nonlinear thermoelasticity constitutive relations for anisotropic bodies // Applied mechanics and technical physics, 2003, V. 44, № 1. – P. 170-175.
10. Sokolova M.Yu. Structural tensors of anisotropy in A.A.Ilyushin space // News of TSU. Series Mathematics. Mechanics. Informatics, 2001, V. 7, Issue 2, Mechanics. – P. 173-178.
11. Markin A.A., Sokolova M.Yu., Khristich D.V. A.A. Ilyushin postulate for anisotropic materials and a variant of constitutive relations // News of Russian Academy of Sciences. Mechanics of solid body, 2011, № 1. – P. 38-45.
12. Markin A.A., Sokolova M.Yu. Thermomechanical models of reversible finite deforming, Tula: TSU Publishers, 2010. – 268 p.