

УДК 532.5:621.694

Хайруллин М.Р. – аспирант

E-mail: marat.khairullin@gmail.com

Золотосов Я.Д. – доктор технических наук, профессор

E-mail: zolotonosov@mail.ru

Казанский государственный архитектурно-строительный университет

Адрес организации: 420043, Россия, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1

Математическая модель ламинарного течения anomalно-вязкой жидкости во вращающемся канале типа «конфузор-диффузор» овального сечения

Аннотация

В работе рассмотрены особенности реодинамики и теплообмена при течении anomalно-вязкой жидкости во вращающемся канале «конфузор-диффузор» овального сечения. Исходя из конфигурации канала, была описана обобщенно-цилиндрическая система координат, в которой построена математическая модель сопряженной задачи теплообмена на базе полных уравнений движения, энергии, неразрывности и теплопроводности стенок канала с учетом начальных распределений скорости, давления, температуры на входе в канал и на выходе из него, и граничных условий на стенках канала.

Ключевые слова: реодинамика, сопряженная задача теплообмена, anomalно-вязкая жидкость, криволинейная система координат.

Рассмотрим математическую модель стационарного ламинарного течения anomalно-вязкой жидкости во вращающемся криволинейном конфузорно-диффузорном канале овального сечения [1].

Рассматривается случай, когда перерабатываемая жидкость поступает во вращающуюся трубу длиной L_{mp} ($L_{mp} \rightarrow \infty$) из емкости большого размера (рис.).

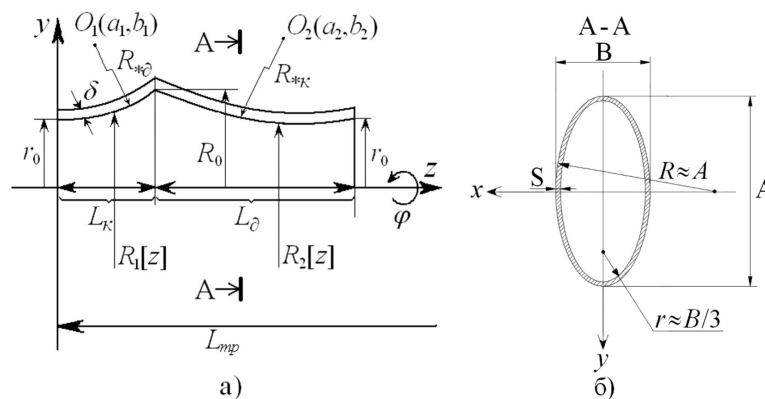


Рис. Фрагмент системы «диффузор-конфузор» в декартовой системе координат:
а) радиальное сечение б) осевое сечение

Граница осевого сечения канала (рис., а) изменяется в соответствии с законом, описываемым функцией $R_i(z) = b_i - \sqrt{R_{*i}^2 - (z - a_i)^2}$, где (a_i, b_i) – координаты центра окружности, по которой построен профиль твердой стенки канала, R_{*i} – радиус окружности, $i=1$ – для диффузора, $i=2$ – для конфузора [2].

Уравнение границы поперечного сечения трубы (рис., б) имеет вид [3]:

$$\frac{x^2}{\bar{A}^2} + \frac{y^2}{\bar{B}^2} = 1, \tag{1}$$

где $\bar{A} = A/2$; $\bar{B} = B/2 \cdot \sqrt{K_1 x^2 + K_2}$; $K_2 \neq 0$.

Предположим, что большая и малая ось в уравнении (1) изменяются по профилю радиального сечения канала, т.е.:

$$\bar{A} := \bar{A}(z) = R_i(z); \bar{B} := \bar{B}(z) = \frac{B}{A} \cdot R_i(z). \quad (2)$$

Тогда уравнение (1) будет являться уравнением поверхности канала «конфузор-диффузор» с овальным сечением.

Развитие течения степенной жидкости во вращающейся трубе овального сечения будем рассматривать в подвижной обобщенно-цилиндрической системе координат (r, φ, z), вращающейся с постоянной угловой скоростью ω, где нулевое значение радиальной координаты совпадает с осью трубы, координаты z – с входным сечением, а угловой координаты φ – с радиальным сечением трубы. Для этого воспользуемся преобразованием координат:

$$\begin{cases} x = R_i(z) \cdot r \cdot \cos j, \\ y = \frac{B}{A} \cdot R_i(z) \cdot \sqrt{K_1 \cdot (R_i(z) \cdot r \cos j)^2 + K_2} \cdot r \cdot \sin j, \\ z = z. \end{cases} \quad (3)$$

Введем в уравнения движения, энергии и теплопроводности стенок канала безразмерные переменные и параметры [2]:

$$\begin{aligned} \bar{z} = z/L_{yc}; \quad \bar{r} = r/R_0; \quad \bar{R} = R_0/L_{yc}; \quad \tilde{R} = d_3/R_0; \quad \bar{u} = u_m/u_0; \quad \bar{L} = L_{mp}/L_{yc}; \\ d = d/L_{yc}; \quad \bar{a}_i = a_i/L_{yc}; \quad \bar{b}_i = b_i/L_{yc}; \quad \bar{R}_{*i} = R_{*i}/L_{yc}, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (4)$$

где L_{yc} – длина трубы; R_0 – входной радиус конфузора; d_3 – эквивалентный диаметр трубы; δ – толщина стенки канала; u_0 – начальная скорость потока, $u_m = Q/S_{сеч}$ – средняя скорость потока.

При этом формула преобразования координат запишется в виде:

$$\begin{cases} x = \bar{R} \cdot R_i(\bar{z}) \cdot \bar{r} \cdot \cos j, \\ y = \frac{B}{A} \cdot \bar{R} \cdot R_i(\bar{z}) \cdot \sqrt{K_1 \cdot (\bar{R} \cdot R_i(\bar{z}) \cdot \bar{r} \cos j)^2 + K_2} \cdot \bar{r} \cdot \sin j, \\ z = L_{yc} \cdot \bar{z}. \end{cases} \quad (3')$$

Компоненты метрического тензора в криволинейной системе координат (r, φ, z), определяемые по формуле [5]:

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^j}, \quad (5)$$

где $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z, \tilde{x}^1 = \bar{r}, \tilde{x}^2 = j, \tilde{x}^3 = \bar{z}$,

будут иметь вид:

$$\begin{aligned} g_{11} &= (\bar{R} \cdot R_i(\bar{z}))^2 \cdot \left(\cos^2 j + \frac{(B/A \cdot \sin j)^2 (2K_1 (\bar{R} \cdot R_i(\bar{z}) \cdot \bar{r} \cdot \cos j)^2 + K_2)^2}{K_1 (\bar{R} \cdot R_i(\bar{z}) \cdot \bar{r} \cdot \cos j)^2 + K_2} \right) \\ g_{12} = g_{21} &= (\bar{R} \cdot R_i(\bar{z}))^2 \cdot \bar{r} \cdot \cos j \sin j \cdot \left((K_1 (\bar{R} \cdot R_i(\bar{z}) \cdot \bar{r})^2 (\cos^2 j - \sin^2 j) + K_2) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{(B/A)^2 (2K_1 (\bar{R} \cdot R_i(\bar{z}) \cdot \bar{r} \cdot \cos j)^2 + K_2)^2}{K_1 (\bar{R} \cdot R_i(\bar{z}) \cdot \bar{r} \cdot \cos j)^2 + K_2} - 1 \right) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
 g_{13} = g_{31} &= \bar{R}^2 R_i(\bar{z}) R_i'(\bar{z}) \cdot \bar{r} \cdot \left\{ \cos^2 j + \frac{(B/A \cdot \sin j)^2 (2K_1 (\bar{R} \cdot R_i(\bar{z}) \cdot \bar{r} \cdot \cos j)^2 + K_2)^2}{K_1 (\bar{R} \cdot R_i(\bar{z}) \cdot \bar{r} \cdot \cos j)^2 + K_2} \right\} \\
 g_{22} &= (\bar{R} \cdot R_i(\bar{z}) \cdot \bar{r})^2 \cdot \left\{ \sin^2 j + \frac{(B/A \cdot \cos j)^2 (K_1 (\bar{R} \cdot R_i(\bar{z}) \cdot \bar{r})^2 (\cos^2 j - \sin^2 j) + K_2)^2}{K_1 (\bar{R} \cdot R_i(\bar{z}) \cdot \bar{r} \cdot \cos j)^2 + K_2} \right\} \\
 g_{23} = g_{32} &= (\bar{R} \cdot \bar{r})^2 R_i(\bar{z}) \cdot R_i'(\bar{z}) \cdot \cos j \sin j \cdot \left\{ (K_1 (\bar{R} \cdot R_i(\bar{z}) \cdot \bar{r})^2 (\cos^2 j - \sin^2 j) + K_2) \cdot \right. \\
 &\quad \left. \cdot \frac{(B/A)^2 (2K_1 (\bar{R} \cdot R_i(\bar{z}) \cdot \bar{r} \cdot \cos j)^2 + K_2)^2}{K_1 (\bar{R} \cdot R_i(\bar{z}) \cdot \bar{r} \cdot \cos j)^2 + K_2} - 1 \right\} \\
 g_{33} &= (\bar{R} \cdot R_i'(\bar{z}) \cdot \bar{r})^2 \cdot \left\{ \cos^2 j + \frac{(B/A \cdot \sin j)^2 (2K_1 (\bar{R} \cdot R_i(\bar{z}) \cdot \bar{r} \cdot \cos j)^2 + K_2)^2}{K_1 (\bar{R} \cdot R_i(\bar{z}) \cdot \bar{r} \cdot \cos j)^2 + K_2} \right\} + \bar{L}^2;
 \end{aligned}$$

Ассоциированный метрический тензор, определяется из соотношения:

$$g^{ik} = \frac{G^{ik}}{g},$$

где $g \equiv \det[g_{ik}]$, $G^{ik} = G^{ki}$ – есть алгебраическое дополнение g_{ik} в определителе g .

Дифференциальные операторы в тензорно-индексном виде определяются следующими формулами [4, 5]:

$$(\nabla \mathbf{U})_{ij} = U_{i,j} = \frac{\partial U_i}{\partial \tilde{x}^j} - \sum_{k=1}^3 \Gamma_{ij}^k U_k,$$

где $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^3 g^{im} \left(\frac{\partial g_{mi}}{\partial \tilde{x}^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial \tilde{x}^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \tilde{x}^m} \right)$ – символы Кристоффеля второго рода;

$$\mathit{grad} U = \left(\sum_{i=1}^3 g^{i1} \frac{\partial U}{\partial \tilde{x}^1} \right) \cdot \mathbf{e}_{\tilde{x}^1} + \left(\sum_{i=1}^3 g^{i2} \frac{\partial U}{\partial \tilde{x}^2} \right) \cdot \mathbf{e}_{\tilde{x}^2} + \left(\sum_{i=1}^3 g^{i3} \frac{\partial U}{\partial \tilde{x}^3} \right) \cdot \mathbf{e}_{\tilde{x}^3};$$

$$\mathit{div} U = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \cdot \left\{ \frac{\partial (\sqrt{|g|} \cdot U_1)}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\partial (\sqrt{|g|} \cdot U_2)}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial (\sqrt{|g|} \cdot U_3)}{\partial \tilde{x}^3} \right\}$$

$$\Delta U(\bar{r}, \mathbf{j}, \bar{z}) = \mathit{div} \mathit{grad} U(\bar{r}, \mathbf{j}, \bar{z}) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} \left(\sqrt{|g|} \cdot \sum_{k=1}^3 g^{ik} \frac{\partial U}{\partial \tilde{x}^k} \right) \quad (7)$$

$$[UV] = U \times V = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_{\tilde{x}^1} & \mathbf{e}_{\tilde{x}^2} & \mathbf{e}_{\tilde{x}^3} \\ U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}.$$

Уравнения движения, неразрывности, энергии и теплопроводности при течении аномально-вязкой жидкости в трубе с учетом переносной и кориолисовой сил инерции имеют вид [5, 6]:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla) V = - \frac{1}{\rho} \mathit{grad} p + w^2 \tilde{x}^1 \mathbf{e}_{\tilde{x}^1} - 2[wV] + \nabla t; \mathit{div} V = 0; V \nabla T = a(\Delta T) + \frac{k}{rc} \cdot A^{n+1};$$

$\Delta T_c = 0$, где $t_{ij} = k \cdot A^{n-1} \cdot \Delta_{ij}$ – реологическое уравнение состояния среды,

$$A = \left[4 \cdot \sum_{i=1}^3 \Delta_{ij}^2 + 8 \cdot \sum_{i < j} \Delta_{ij}^2 \right]^{1/2} - \text{интенсивность скоростей деформации, } \Delta_{ij} = \frac{1}{2} (T_{ij} + T_{ji}) - \quad (8)$$

компоненты тензора скоростей деформации, где $T_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial \tilde{x}^j} - \sum_{k=1}^3 \Gamma_{ij}^k V_k$.

Условия однозначности системы (8) заданы начальным распределением скорости, давления, температуры на входе в канал и на выходе из него, и граничными условиями на стенках канала [2].

- Условия на входе в канал $\bar{z} = 0$:
 - для скорости: $V_{\bar{r}} = 0; V_j = 0; V_{\bar{z}} = u_0$;
 - для температуры жидкости $T = T_0$;
 - для температуры стенки $T_c = T_0$.
- Условия на выходе из канала $\bar{z} = \bar{L}$:
 - для скорости: $V_{\bar{r}} = 0; V_j = 0; V_{\bar{z}} = \bar{u} \frac{(3n+1)}{(n+1)} (1 - \bar{r}^2)$;
 - для температуры жидкости $\frac{\partial T}{\partial \bar{z}} = 0$;
 - для температуры стенки $\frac{\partial T_c}{\partial \bar{z}} = 0$.
- Граничные условия при $0 < \bar{z} < \bar{L}$:
 - Условие на границе жидкости и внутренней стенки $\bar{r} = 1$:
для скорости: $V_{\bar{r}} = 0; V_j = 0; V_{\bar{z}} = 0$;
для температуры четвертого рода: $T = T_c$; $l \frac{\partial T}{\partial \bar{r}} = l_c \frac{\partial T_c}{\partial \bar{r}}$.
 - Условие на границе внешней стенки и жидкости третьего рода $\bar{r} = 1 + \bar{d}$:
для температуры $l_c \frac{\partial T_c}{\partial \bar{r}} = a_{жс} (T_{жс} - T_c)$,

где p_0 – начальное давление; ω – угловая скорость вращения трубы; $V_{\bar{r}}, V_j, V_{\bar{z}}$ – радиальная, окружная, осевая составляющие скорости; a – коэффициент теплопроводности среды, T – температура жидкости; T_c – температура стенки канала; c – удельная теплоемкость; ρ – плотность среды; k – характеристика консистенности среды; n – индекс течения.

Решение системы (8) будем искать в виде [7]:

$$\begin{aligned} V_{\bar{r}} &= u_0 f(\bar{r}, j, \bar{z}); \quad V_j = \omega \bar{r} G(\bar{r}, j, \bar{z}); \quad V_{\bar{z}} = u_0 D(\bar{r}, j, \bar{z}); \\ p &= \rho u_0^2 P(\bar{r}, j, \bar{z}) + p_0; \quad T = T_0 \cdot t(\bar{r}, j, \bar{z}); \quad T_c = T_0 \cdot q(\bar{r}, j, \bar{z}). \end{aligned} \quad (10)$$

Рассмотрим слагаемое $(V \cdot \nabla)V$ в системе уравнений (8):

$$(\nabla \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}) = (\nabla \mathbf{V})_{ij} e^i e^j \cdot V^k e^k = (\nabla \mathbf{V})_{ij} V^k e^i (e^j \cdot e^k) = (\nabla \mathbf{V})_{ij} V^k e^i d_k^j = (\nabla \mathbf{V})_{ij} V^j e^i = (\nabla \mathbf{V} \cdot \mathbf{V})_i e^i, \quad (11)$$

Таким образом:

$$(\nabla \mathbf{V} \cdot \mathbf{V})_i = \sum_{j=1}^3 (\nabla \mathbf{V})_{ij} \cdot V^j.$$

Используя формулу для компонент ковариантной производной в формуле (7) преобразуем (11) к виду [5]:

$$(\nabla \mathbf{V} \cdot \mathbf{V})_i = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial V_i}{\partial \bar{x}^j} - \Gamma_{ij}^k V_k \right) \cdot V^j e^j. \quad (12)$$

Если выразить все через ковариантные компоненты вектора \mathbf{V} ,

$V^j = \sum_{n=1}^3 g^{nj} V_n$, и тогда:

$$(\nabla \mathbf{V} \cdot \mathbf{V})_i = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial V_i}{\partial \tilde{x}^j} - \Gamma_{ij}^k V_k \right) \cdot \sum_{n=1}^3 g^{nj} V_n. \quad (13)$$

Принимая малые деформации вектора ускорений $\partial \mathbf{V} / \partial t$ ($\partial \mathbf{V} / \partial t \rightarrow 0$), с учетом подстановки (10) и формулы (13) система (8) примет вид:

Уравнения движения:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^3 \left\{ \left(g^{1k} \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^k} - g^{1k} \Gamma_{1k}^1 f \right) f + \frac{\bar{r}N}{\tilde{R}} \left(g^{2k} \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^k} - (g^{1k} \Gamma_{1k}^2 + g^{2k} \Gamma_{1k}^1) f \right) G + \right. \\ & \left. + \left(g^{3k} \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^k} - (g^{1k} \Gamma_{1k}^3 + g^{3k} \Gamma_{1k}^1) f \right) D - \frac{\bar{r}N}{\tilde{R}} \left(\frac{\bar{r}N}{\tilde{R}} g^{2k} \Gamma_{1k}^2 G + (g^{2k} \Gamma_{1k}^3 + g^{3k} \Gamma_{1k}^2) D \right) G - \right. \\ & \left. - g^{3k} \Gamma_{1k}^3 D^2 + g^{k1} \frac{\partial P}{\partial \tilde{x}^k} \right\} = \frac{\tilde{R}^n}{\text{Re}} \cdot \sum_{k=1}^3 \frac{1}{\sqrt{|g|}} \cdot \frac{\partial (\sqrt{|g|} \cdot \Delta_{1k} A^{n-1})}{\partial \tilde{x}^k} + \frac{\bar{r}N^2}{\tilde{R}^2}; \\ & \sum_{k=1}^3 \left\{ \left(g^{1k} \frac{\partial G}{\partial \tilde{x}^k} - (g^{1k} \Gamma_{2k}^2 + g^{2k} \Gamma_{2k}^1) G + g^{11} \frac{G}{\bar{r}} \right) f + \frac{\bar{r}N}{\tilde{R}} \left(g^{2k} \frac{\partial G}{\partial \tilde{x}^k} - g^{2k} G + g^{21} \frac{G}{\bar{r}} \right) G + \right. \\ & \left. + \left(g^{3k} \frac{\partial G}{\partial \tilde{x}^k} - (g^{2k} \Gamma_{2k}^3 + g^{3k} \Gamma_{2k}^2) G + g^{31} \frac{G}{\bar{r}} \right) D - \frac{\tilde{R}}{\bar{r}N} \left(g^{1k} \Gamma_{2k}^1 f + (g^{1k} \Gamma_{2k}^3 + g^{3k} \Gamma_{2k}^1) D \right) f - \right. \\ & \left. - \frac{\tilde{R}}{\bar{r}N} g^{3k} \Gamma_{2k}^3 D^2 + g^{k2} \frac{\partial P}{\partial \tilde{x}^k} \right\} = \frac{\tilde{R}^n}{\bar{r}N \text{Re}} \cdot \sum_{k=1}^3 \frac{1}{\sqrt{|g|}} \cdot \frac{\partial (\sqrt{|g|} \cdot \Delta_{2k} A^{n-1})}{\partial \tilde{x}^k} + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \cdot (D - f); \\ & \sum_{k=1}^3 \left\{ \left(g^{1k} \frac{\partial D}{\partial \tilde{x}^k} - (g^{1k} \Gamma_{3k}^3 + g^{3k} \Gamma_{3k}^1) D \right) f + \frac{\bar{r}N}{\tilde{R}} \left(g^{2k} \frac{\partial D}{\partial \tilde{x}^k} - (g^{2k} \Gamma_{3k}^3 + g^{3k} \Gamma_{3k}^2) D \right) G + \right. \\ & \left. + \left(g^{3k} \frac{\partial D}{\partial \tilde{x}^k} - g^{3k} \Gamma_{3k}^3 D \right) D - \frac{\bar{r}N}{\tilde{R}} \left(\frac{\bar{r}N}{\tilde{R}} g^{2k} \Gamma_{3k}^2 G + (g^{2k} \Gamma_{3k}^3 + g^{3k} \Gamma_{3k}^2) D \right) G - \right. \\ & \left. - g^{1k} \Gamma_{3k}^1 D^2 + g^{k3} \frac{\partial P}{\partial \tilde{x}^k} \right\} = \frac{\tilde{R}^n}{\text{Re}} \cdot \sum_{k=1}^3 \frac{1}{\sqrt{|g|}} \cdot \frac{\partial (\sqrt{|g|} \cdot \Delta_{3k} A^{n-1})}{\partial \tilde{x}^k}; \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнение неразрывности:

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \cdot \left(\frac{\partial (\sqrt{|g|} \cdot V_1)}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\partial (\sqrt{|g|} \cdot V_2)}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial (\sqrt{|g|} \cdot V_3)}{\partial \tilde{x}^3} \right) = 0;$$

Уравнение энергии:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^3 \left\{ g^{1k} f \frac{\partial q}{\partial \tilde{x}^k} + \frac{\bar{r}N}{\tilde{R}} g^{2k} G \frac{\partial q}{\partial \tilde{x}^k} + g^{3k} D \frac{\partial q}{\partial \tilde{x}^k} \right\} = \\ & = \frac{1}{Pe} \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} \left(\sqrt{|g|} \cdot \sum_{k=1}^3 g^{ik} \frac{\partial T}{\partial \tilde{x}^k} \right) + \frac{\bar{T}}{\text{Re}} \cdot A^{n+1}; \end{aligned}$$

Уравнение теплопроводности стенок канала:

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} \left(\sqrt{|g|} \cdot \sum_{k=1}^3 g^{ik} \frac{\partial q}{\partial \bar{x}^k} \right) = 0,$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned} \bar{z} = 0: & \quad f = 0; \quad G = 0; \quad D = 1; \quad t = 1; \quad q = 1; \\ \bar{z} = 1: & \quad f = 0; \quad G = 0; \quad D = \bar{u} \frac{(3n+1)}{(n+1)} (1 - \bar{r}^2); \quad \frac{\partial t}{\partial \bar{z}} = 0; \quad \frac{\partial q}{\partial \bar{z}} = 1; \\ 0 < \bar{z} < 1: & \\ \bar{r} = 1: & \quad f = 0; \quad G = 0; \quad D = 0; \quad t = q; \quad l \frac{\partial t}{\partial \bar{r}} = l_c \frac{\partial q}{\partial \bar{r}}; \\ \bar{r} = 1 + \bar{d}: & \quad \frac{\partial q}{\partial \bar{r}} = -Bi(q_{жс} - q_c), \end{aligned} \tag{15}$$

где:

$$\begin{aligned} \bar{A}_0^{n-1} &= \left[2(\Delta_{\bar{r}\bar{r}})^2 + 2(\Delta_{j\bar{j}})^2 + 2(\Delta_{\bar{z}\bar{z}})^2 + (\Delta_{\bar{r}\bar{j}})^2 + (\Delta_{\bar{r}\bar{z}})^2 + (\Delta_{j\bar{z}})^2 \right]^{(n-1)/2}; \\ Re &= \frac{ru_0^{2-n} d_3^n}{k} - \text{число Рейнольдса}; \quad N = \frac{wd_3}{u_0} - \text{число закрутки}; \\ Pe &= \frac{u_0 R_0}{a} - \text{число Пекле}; \quad Bi = \frac{aR_0}{l_c} - \text{число Био}; \end{aligned}$$

Таким образом, разработана сопряженная задача теплообмена при течении аномально-вязкой жидкости типа Освальда-де-Вилля во вращающемся канале «конфузор-диффузор» овального сечения. Описанная в работе криволинейная система координат является обобщением для известной цилиндрической системы координат. Несомненная ценность данной работы заключается в том, что построенная математическая модель является универсальной для каналов различной конфигурации. Соответствующая вариация коэффициентов: $A=B$, $K_1=0$, $K_2=1$, и символов Кристоффеля позволяет получить известные уравнения движения, неразрывности, энергии и теплопроводности стенок канала для декартовой, цилиндрической и сферической систем координат.

Численная реализация полученной математической модели позволит определить поле скоростей, давления и температур при течении неньютоновских сред в каналах конфузорно-диффузорного типа и уточнить методику инженерного расчета теплообменного оборудования для нагрева сред с широкими реологическими свойствами.

Список обозначений

A – интенсивность скоростей деформации; a – коэффициент температуропроводности, m^2 ; c – удельная теплоемкость, Дж/(кг·К); δ – толщина стенки канала, м; k – характеристика консистентности среды, Па·с; L_{mp} – общая длина канала типа «конфузор-диффузор», м; L_k – длина элемента типа конфузор, м; L_d – длина элемента типа диффузор, м; R_{*i} – радиус дуги окружности диффузора ($i=1$), конфузора ($i=2$), м; r_0 , R_0 – наименьший и наибольший радиусы канала типа «конфузор-диффузор», м; d_3 – эквивалентный диаметр трубы, м; N – число закрутки; n – индекс течения; p – статистическое давление, Па; Pe – число Пекле; Re – критерий Рейнольдса; T – температура нагреваемой среды, К; T_c – температура стенки канала, К; $T_{жс}$ – температура жидкости, К; $V_r=V_1$, $V_\varphi=V_2$, $V_z=V_3$ – радиальная, окружная, осевая составляющие скорости

течения, м/с; $\alpha_{жс}$ – коэффициент теплоотдачи жидкости, Вт/(м²·К); λ – коэффициент теплопроводности среды, Вт/(м·К); λ_c – коэффициент теплопроводности стенки, Вт/(м·К); ρ – плотность, кг/м³; ω – угловая скорость вращения, с⁻¹.

Список литературы

1. Багоутдинова А.Г., Золотонос Я.Д., Мустакимова С.А., Хайруллин М.Р. Энергосберегающее теплообменное оборудование на базе теплообменных элементов типа «конфузор-диффузор» и пружинно-витых каналов. Тезисы доклада. Материалы Всероссийской научно-практической конференции, посвященной 30-летию НХТИ «Актуальные инженерные проблемы химических и нефтехимических производств и пути их решения». – Нижнекамск: НХТИ, 2012. – С. 81-83.
2. Хайруллин М.Р., Золотонос Я.Д. Сопряженная задача теплообмена при течении степенной жидкости во вращающемся канале «конфузор-диффузор» овального сечения // Известия КГАСУ, 2012, № 1 (19). – С. 94-102.
3. Хайруллин М.Р., Золотонос Я.Д. К вопросу течения аномально-вязкой среды во вращающемся овальном канале «конфузор-диффузор» // Тезисы докладов VII Международной молодежной научной конференции «Тинчуринские чтения». – Казань: КГЭУ, 2012. – С. 36-37.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Изд-во Наука, 1973. – 832 с.
5. Астарита Дж., Марручи Дж. Основы гидродинамики неньютоновских жидкостей. – М.: Мир, 1978. – 195 с.
6. Виноградов Г.В., Малкин А.Я. Реология полимеров. – М.: Изд-во Химия, 1977. – 440 с.
7. Золотонос А.Я., Золотонос Я.Д., Горская Т.Ю. Совершенствование теплообменных аппаратов типа «труба в трубе» с вращающейся поверхностью теплообмена «конфузор-диффузор» // Известия КГАСУ, 2012, № 2 (20). – С. 112-124.

Khairullin M.R. – post-graduate student

E-mail: marat.khairullin@gmail.com

Zolotonosov Ya.D. – doctor of technical sciences, professor

E-mail: zolotonosov@mail.ru

Kazan State University of Architecture and Engineering

The organization address: 420043, Russia, Kazan, Zelenaya st., 1

Mathematical model of laminar flow of power-law fluid in the rotating «confusor-diffusor» channel with oval section

Resume

In this work we considered features of the reodynamics in the flow of abnormal-viscous fluid in the rotating «confusor-diffusor» channel with oval section of the apparatus of the type «pipe in pipe». Based on the configuration of the channel, associated curvilinear system of coordinates was described. In the generalized cylindrical system of coordinates on the basis of the complete equations of motion, continuity, energy and thermal conductivity of the channel walls mathematical model of conjugate heat transfer problem with the initial distributions of velocity, pressure, temperature at the channel entrance and exit, and the boundary conditions on the channel walls was built. Curvilinear Coordinate system described in the work is a generalization for the cylindrical coordinate system. Certainly the value of this work lies in the fact that the constructed mathematical model is universal for channels of various configurations. The corresponding variation of the coefficients: $A=B$, $K1=0$, $K2=1$, and parameters Lamé allows you to get the well-known equations of motion, continuity, energy and thermal conductivity of the channel walls for the Cartesian, cylindrical and spherical coordinate systems.

The subsequent development of a mathematical model of conjugate heat transfer in rotating confusor-diffuser channels oval cross section and its numerical implementation will

determine the values of velocities and pressures in the flow part of the channel. Also it will be possible to outline the main directions in the development of engineering methods for calculating heat transfer equipment for the heating of non-Newtonian environment.

Keywords: reodynamics, conjugate heat transfer problem, abnormal-viscous fluid, channel with oval section, curvilinear coordinate system.

References

1. Bagoutdinova A.G., Zolotonosov J.D., Mustakimova S.A., Khairullin M.R. Energy-saving heat-exchange equipment on the basis of the heat-exchange elements of the type «confusor-diffusor» and spring-twisted channels. Abstract of the report. Materials of all-Russian scientific-practical conference, dedicated to the 30-th birthday NChTI «Actual engineering problems of chemical and petrochemical industries and ways of their solution». – Nizhnekamsk: NChTI, 2012. – P. 81-83.
2. Khairullin M.R., Zolotonosov J.D. Conjugate heat transfer problem in the flow of power-law fluid in the rotating «confusor-diffusor» channel with oval section // News of the KSUAE, 2012, № 1 (19). – P. 94-102.
3. Khairullin M.R., Zolotonosov J.D. To the question of abnormally-viscous environment flow in a rotating oval channel of type «confusor-diffusor» // Abstracts of the VII International youth scientific conference «Tinchurin's reading». – Kazan: KSEU, 2012. – P. 36-37.
4. Loyzansky L.G. Fluid and gas mechanics. 6th edition. – M.: Publishers Nauka, 1987. – 840 p.
5. Midlman C. The flow of polymers. – M.: Mir, 1971. – 259 p.
6. Vinogradov G.V., Malkin A.YA. Rheology of polymer. – M.: Publishers Himiya, 1977. – 440 p.
7. Zolotonosov A.Ya., Zolotonosov J.D., Gorskaya T.Yu. Improvement of heat exchangers of type «pipe in pipe» with a rotating surface heat of type «confusor-diffusor» // News of the KSUAE, 2012, № 2 (20). – P. 112-124.