

УДК: 539.3

DOI: 10.52409/20731523_2023_2_70

EDN: YWXCUL



Аналитические решения для криволинейных стержней на основе соотношений для прямолинейного стержня

М.Н.Серазутдинов¹

¹Казанский национальный исследовательский технологический университет,
г. Казань, Российская Федерация

Аннотация: В статье представлены аналитические решения и метод расчета криволинейных стержней, основанные на использовании формул для вычисления деформаций прямолинейного стержня. Актуальность полученных результатов обусловлена тем, что элементы конструкций в виде криволинейных стержней традиционно используются в строительстве, а в последнее время значительно расширяется круг приложения криволинейных структур в связи с применением новых конструктивных материалов - композитов с наполнителем из стекла. Основная цель представленного в работе исследования - получить аналитические решения, позволяющие определить напряженно-деформированного состояния криволинейных стержней, показать универсальность, оригинальность и сравнительную простоту метода. Для достижения этой цели требуется решить следующие задачи: выбрать криволинейный стержень, результаты расчета напряженно-деформированного состояния которого опубликованы в научной литературе; определить вид функций, аппроксимирующих искомые параметры; подробно изложить аналитические выкладки метода; на основе сравнения результатов решения с известными данными, показать достоверность получаемых аналитических результатов.

Результаты. В работе представлены аналитический метод и результаты расчета стержней с продольной осью в виде окружности. Подробно изложен алгоритм получения решения. Обращается внимание на особенности реализации метода. Получены формулы для определения перемещений и углов поворота стержней при различных видах нагружения. Сравнение этих формул с опубликованными в научной литературе данными показывает их хорошее согласование.

Выводы. Представлены аналитические решения задачи расчета напряженно-деформированного состояния криволинейных стержней с использованием соотношений, справедливых для прямолинейных стержней. Показана, сравнительная простота и универсальность предложенного метода. В настоящее время наблюдается усложнение форм строительных конструкций, появляются сооружения, геометрия которых имеет аналитически не задаваемую форму. Эта особенность определяет значимость полученных результатов для расчета строительных конструкций, т.к. наиболее ярко достоинства описанного метода проявляются при расчете криволинейных стержневых систем неканонической формы.

Ключевые слова: криволинейные стержни, вариационный метод, аналитические решения

Для цитирования: Серазутдинов М.Н. Аналитические решения для криволинейных стержней на основе соотношений для прямолинейного стержня // Известия КГАСУ 2023 № 2 (64), с.70-79, DOI: 10.52409/20731523_2023_2_70, EDN: YWXCUL

Analytical solutions for curved rods based on the relations for a rectilinear rod

M.N. Serazutdinov¹

¹Kazan National Research Technological University
Kazan, Russian Federation

Abstract: The article presents analytical solutions and a method for calculating curved rods based on the use of formulas for calculating deformations of a rectilinear rod. The relevance of the results obtained is due to the fact that structural elements in the form of curved rods are traditionally used in construction, and recently the range of applications of curved structures has been significantly expanded due to the use of new structural materials - composites with glass filler. The Kossier-Timoshenko hypotheses are accepted, analytical solutions are obtained by the variational method using the Lagrange functional. The peculiarity of the method is that the formulas for calculating deformations do not include parameters characterizing the curvature of the longitudinal axis of a curved rod. Previously, this method was used to obtain numerous calculations of the statics of rod systems in linear and physically nonlinear formulations, as well as for calculations of thin-walled curved rods. Numerical methods were used. The article presents solutions for curved rods obtained by the analytical method. The main purpose of the research presented in this paper is to obtain analytical solutions that allow determining the stress-strain state of curved rods, to show the versatility, originality and comparative simplicity of the method. To achieve this goal, it is necessary to solve the following tasks: select a curved rod, the results of calculating the stress-strain state of which are published in the scientific literature; determine the type of functions approximating the desired parameters; describe in detail the analytical calculations of the method; show the reliability of the analytical results obtained based on comparing the results of the solution with known data.

Keywords: curved rods, variational method, analytical solutions.

For citation: Serazutdinov M.N. Analytical solutions for curved rods based on the relations for a rectilinear rod // News KSUAE 2023 № 2 (64), p.70-79, DOI: 10.52409/20731523_2023_2_70, EDN: YWXCUL

1. Введение

Деформируемые элементы в виде криволинейных стержней, в настоящее время достаточно часто используются при создании строительных конструкций. Арки, пилоны мостов, композитные стержневые структуры, ребристые купола, ванты и опоры вантовых конструкций в виде криволинейных стержней имеют широкий круг приложений. В частности, как отмечается в работе [3]: «Доказано, что практически во всех странах мира и на разных континентах велось и ведется проектирование и строительство сложных оболочечных структур и оболочек. Изменился только приоритет в применении конструктивных строительных материалов. Если раньше в основном применялся железобетон, то сейчас в приоритете стержневые криволинейные структуры, композитные оболочки и стержневые структуры с наполнителем из стеклянных панелей»

С развитием технологий усложняется форма и структура создаваемых конструкций [1-3], возникает необходимость исследования новых не простых вопросов использования теории стержней при моделировании технологических [2, 3-6] и сложных динамических процессов [7-8], создаются новые способы определения механических характеристик композиционных материалов, расчетов при нелинейных деформациях на основе анализа деформирования элементов в виде стержней и пластин [9-11]. Существенно увеличиваются возможности использования компьютерных методов моделирования и расчетов.

Соответственно с запросами развиваются, в частности, теория и методы расчетов напряженно-деформированного состояния криволинейных стержневых систем. В известных монографиях по расчету стержней обобщены некоторые результаты достигнутые в этой области.

Одна из особенностей традиционно используемой теории криволинейных стержней заключается в том, что в основные соотношения теории входят радиусы кривизны

продольной оси стержня, а в некоторых случаях и производные радиусов кривизны. Следовательно, в основные соотношения входят производные радиуса-вектора продольной оси стержня не ниже второго порядка. Для некоторых элементов конструкций данные о геометрии стержней задается дискретно, так как они имеют неканонические формы. Поэтому для получения достоверных данных, возникает необходимость при расчетах использовать специальные методы аппроксимации функций, которые позволяют получить для дискретно заданного радиуса-вектора информацию о его производных с требуемой точностью [12, 13].

Для расчета можно применять метод, в котором деформации криволинейного стержня выражаются по формулам для прямолинейного стержня. Особенность метода состоит в том, что в расчетные соотношения не входят кривизны продольной оси криволинейного стержня. Его можно использовать для решения различных линейных и нелинейных задач статики и динамики стержневых систем [14-16]. В указанных публикациях и в ряде других, для получения расчетных данных использовалась численная реализация вариационного метода, которая предполагает вычисление входящих в функционал интегралов с использованием квадратурных формул, т.е. с использованием дискретной информации. Поэтому при интерпретации этого метода может возникнуть ошибочное представление, что криволинейный стержень в точках численного интегрирования заменяется прямолинейным.

Основная цель проведенного исследования состояла в том, чтобы получить аналитические решения задачи расчета напряженно-деформированного состояния криволинейных стержней и продемонстрировать универсальность, оригинальность и сравнительную простоту метода.

Для достижения этой цели требуется решить следующие задачи:

- выбрать криволинейный стержень, результаты расчета напряженно-деформированного состояния которого опубликованы в научной литературе;
- определить вид функций, аппроксимирующих искомые параметры;
- подробно изложить аналитические выкладки метода
- на основе сравнения результатов решения с известными данными, показать достоверность получаемых аналитических результатов.

2. Материалы и методы

Приведем основные формулы и некоторые особенности расчетов криволинейного стержня с продольной осью l_n (рис. 1).

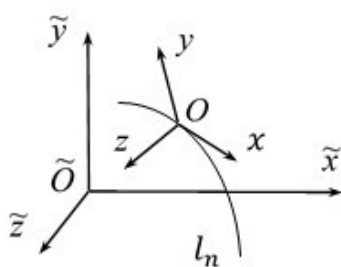


Рис. 1. Участок продольной оси стержня l_n
Fig. 1. Section of the longitudinal axis of the rod l_n

Отметим, что ранее метод определения напряженно-деформированного состояния стержневых систем в котором деформации криволинейного стержня выражаются по формулам для прямолинейного стержня, успешно использовался в сочетании с численными методами расчета [14-16]. Были получены решения для различных, в том числе и сложных линейных и нелинейных задач статики и динамики стержневых систем. Показана достоверность и высокая точность расчетов. Получить аналитические формулы для каких-то случаев ранее не удавалось. Далее представлены основные соотношения, на базе которых находятся аналитических решения в рассмотренных случаях. Описанный

алгоритм и приведенные соотношения могут служить основой для построения аналитических решений и в других случаях.

Для определения напряженно-деформированного состояния стержня вводится глобальная декартова система координат $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ и локальная – $Oxyz$ (рис.1). Полагается, что оси Ox , Oy , Oz являются главными центральными осями поперечного сечения стержня, а начало координат $Oxyz$ расположено в сечении, для которого нужно вычислить деформации и напряжения.

Введение глобальной систем координат связано с тем, что особенность описанного метода предполагает использование этих двух систем координат. Деформации и напряжения вычисляются в локальной системе координат, а перемещения задаются в глобальной системе координат. В результате, можно использовать для расчетов криволинейных стержней формулы справедливые для прямолинейного стержня и учесть кривизну продольной оси.

Справедливы равенства

$$\{x, y, z\}^T = \{x_o, y_o, z_o\}^T + [A_n] \{\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\}^T. \quad (1)$$

Здесь $\{x_o, y_o, z_o\}^T$ – вектор $\tilde{O}O$ (рис.1), $[A_n]$ – матрица направляющих косинусов n_{ij} ($i, j = 1, 3$) системы координат Oxy .

Считается, что справедливы закон Гука, гипотезы Тимошенко, стержень является стержнем малой кривизны.

В глобальной системе координат $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ вводится вектор перемещения $\{\tilde{U}\} = \{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3\}$ и вектор углов поворота поперечных сечений стержня $\{\tilde{\varphi}\} = \{\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3\}$. Перемещения $\{U\}$ и углы поворота $\{\varphi\}$ связаны с $\{\tilde{U}\}$ и $\{\tilde{\varphi}\}$ соотношениями:

$$\{U\} = [A_n] \{\tilde{U}\}, \quad \{\varphi\} = [A_n] \{\tilde{\varphi}\}. \quad (2)$$

Линейные ε_{xx} и угловые γ_{xy} , γ_{xz} деформации вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} - y \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_2}{\partial x} - y \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \varphi_3; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u_3}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \varphi_2. \end{aligned} \quad (3)$$

При вычислении производных по направлению Ox следует иметь ввиду, что направляющие косинусы n_{ij} системы координат $Oxyz$ являются константами. Поэтому справедливы равенства:

$$\frac{\partial}{\partial x} \{U\} = [A_n] \frac{\partial}{\partial x} \{\tilde{U}\}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \{\varphi\} = [A_n] \frac{\partial}{\partial x} \{\tilde{\varphi}\}. \quad (4)$$

В соответствии с законом Гука нормальные и касательные напряжения вычисляются по формулам

$$\sigma = E\varepsilon_{xx}, \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz},$$

где E , G – модули упругости и сдвига.

Для определения перемещения и углов поворота используется условие стационарности функционала Лагранжа

$$\int_{l_n} [\delta\Pi - \delta'W] dl_n = 0. \quad (5)$$

Здесь Π – потенциальная энергия деформации; $\delta'W$ – элементарная работа внешних сил.

Опишем получение аналитических решений для криволинейных стержней с продольной осью в виде окружности и части окружности. На рис. 2 схематически представлены круговые стержни, один из которых имеет форму кольца (рис. 2a) и нагружен равномерно распределенной нагрузкой q , второй – на одном конце зашпелен, а на другом нагружен сосредоточенной силой F (рис. 2b). Изложим методику получения аналитического решения на основе представленных здесь соотношений. Найдем решения вариационным методом и сравним их с результатами, полученными на основе классической теории криволинейных стержней [17].

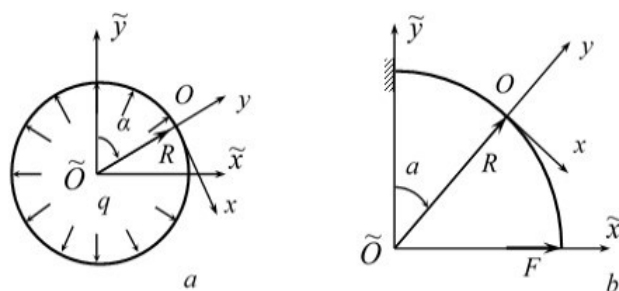


Рис. 2. Стержень с продольной осью в виде окружности (а); стержень с продольной осью в виде части окружности (б)
 Fig. 2. A rod with a longitudinal axis in the form of a circle (a); A rod with a longitudinal axis in the form of a part of a circle (b)

Так как стержни, показанные на рис. 2, деформируются в плоскости $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}$, то $\tilde{u}_3 = u_3 = 0$, $\tilde{\varphi}_1 = \varphi_1 = \tilde{\varphi}_2 = \varphi_2 = 0$.

Полагаем $\tilde{u}_1 = \tilde{u}$, $u_1 = u$, $\tilde{u}_2 = \tilde{w}$, $u_2 = w$, $\tilde{\varphi}_3 = \tilde{\varphi}$, $\varphi_3 = \varphi$. В этом случае

$$\delta\Pi = \frac{1}{2} \delta \iint_A [\sigma \varepsilon_{xx} + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz}] dA =$$

$$= \frac{1}{2} \delta \left[EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + EJ_z \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + GA \left(\frac{dw}{dx} + \varphi \right)^2 \right]$$

и уравнение (5) принимает вид:

$$\int_{l_n} \left\{ \frac{1}{2} \delta \left[EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + EJ_z \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + GA \left(\frac{dw}{dx} + \varphi \right)^2 \right] - \delta'W \right\} dl_n = 0. \quad (6)$$

Здесь A – площадь поперечного сечения стержня; J_z – осевой момент инерции.

Для продольных осей этих стержней направляющие косинусы локальной системы координат Oxy

$$n_{11} = n_{22} = \cos \alpha, \quad n_{21} = -n_{12} = \sin \alpha. \quad (7)$$

Формулы (2), (4), при деформировании стержней плоскости $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}$, записываются следующим образом:

$$u = \tilde{u} n_{11} + \tilde{w} n_{12}, \quad w = \tilde{u} n_{21} + \tilde{w} n_{22}, \quad \varphi = \tilde{\varphi}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} n_{11} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} n_{12}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} n_{21} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} n_{22}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x}. \quad (8)$$

Продольные оси стержней, показанных на рис. 2, описываются уравнениями

$$\tilde{x} = R \sin \alpha, \quad \tilde{y} = R \cos \alpha. \quad (9)$$

Следовательно,

$$\alpha = \arctg \left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}} \right), \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \tilde{x}} = \frac{1}{R} \cos \alpha, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{R} \sin \alpha. \quad (10)$$

Координаты глобальной и локальной систем координат связаны соотношениями:

$$\begin{aligned} x &= -R \sin \alpha + \tilde{x} n_{11} + \tilde{y} n_{21}; & \tilde{x} &= R \sin \alpha + x n_{11} + y n_{12}; \\ y &= -R \cos \alpha + \tilde{x} n_{21} + \tilde{y} n_{22}; & \tilde{y} &= R \cos \alpha + x n_{12} + y n_{22}. \end{aligned} \quad (11)$$

С учетом формул (6), (11), (12) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} n_{11} + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} n_{12} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \tilde{x}} n_{11} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \tilde{y}} n_{12} = \frac{1}{R} \frac{d}{d\alpha}. \end{aligned} \quad (12)$$

3. Результаты и обсуждения

Стержень в виде кольца, нагруженный равномерно распределенной нагрузкой. Кольцо нагружено равномерно распределенной нагрузкой q (рис.2,а) и деформируется симметрично, поэтому $d'W = q \delta w$, $\varphi = 0$. Перемещения стержня в локальной системе координат можно считать функциями угла α ($u = u(\alpha)$, $w = w(\alpha)$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$) и записать условие (5) в следующем виде:

$$\int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \delta \left[EA \left(\frac{du}{d\alpha} \right)^2 + GA \left(\frac{dw}{d\alpha} \right)^2 \right] - q \delta w \right\} d\alpha = 0. \quad (13)$$

Отметим, что это простейшее условие вариационного принципа Лагранжа в которое не входит кривизна стержня и которое обычно используется для расчетов прямолинейных стержней.

Для симметрично нагруженного кольца в глобальной системе координат можно полагать

$$\tilde{w} = w_0 \cos \alpha, \quad \tilde{u} = w_0 \sin \alpha. \quad (14)$$

Учитывая формулы (2), (4), (7), (8), (12), (14), получим

$$\begin{aligned} u &= \tilde{u} n_{11} + \tilde{w} n_{12} = w_0 (n_{11} \sin \alpha + n_{12} \cos \alpha) = \\ &= w_0 (\cos \alpha \sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha) = 0; \\ \frac{du}{d\alpha} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \alpha} n_{11} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \alpha} n_{12} = n_{11} \frac{1}{R} \frac{d}{d\alpha} w_0 \sin \alpha + n_{12} \frac{d}{d\alpha} w_0 \cos \alpha = \\ &= \frac{w_0}{R} \left(n_{11} \frac{d}{d\alpha} \sin \alpha + n_{12} \frac{d}{d\alpha} \cos \alpha \right) = \frac{w_0}{R}; \\ w &= \tilde{u} n_{21} + \tilde{w} n_{22} = w_0 \sin \alpha \cos \alpha + w_0 \cos \alpha \cos \alpha = w_0; \\ \frac{dw}{d\alpha} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \alpha} n_{21} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \alpha} n_{22} = n_{21} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \alpha} + n_{22} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \alpha} = \\ &= n_{21} \frac{1}{R} \frac{d}{d\alpha} w_0 \sin \alpha + n_{22} \frac{1}{R} \frac{d}{d\alpha} w_0 \cos \alpha = 0 \end{aligned} \quad (15),$$

Подставляя соотношения (15) в условие (13), находим

$$w_0 = \frac{qR^2}{EA}. \quad (16)$$

На основе классической модели криволинейных стержней [17], для w_0 получается такая же формула.

Стержень нагруженный сосредоточенной силой. На рис. 2b показан криволинейный стержень, защемленный на одном конце и нагруженный на другом конце сосредоточенной силой F . Продольная ось стержня – часть окружности радиуса R .

Перемещения и угол поворота сечения стержня в локальной системе координат считаем функциями угла α ($u = u(\alpha)$, $w = w(\alpha)$, $\varphi = \varphi(\alpha)$, $0 \leq \alpha \leq \pi/2$). В этом случае условие (6) можно записать в следующем виде:

$$\int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{1}{2} \delta \left[EA \left(\frac{du}{d\alpha} \right)^2 + EJ_z \left(\frac{d\varphi}{d\alpha} \right)^2 + GA \left(\frac{dw}{d\alpha} + \varphi \right)^2 \right] - \delta'W \right\} d\alpha = 0. \quad (17)$$

Элементарная работа $\delta'W$ сосредоточенной силы F

$$\delta'W = \frac{F}{R} \delta^* \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \delta w, \quad (18)$$

где $\delta^* \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right)$ – дельта-функция Дирака.

Перемещения и угол поворота поперечных сечений стержня в глобальной системе координат должны удовлетворять геометрическим граничным условиям в месте заделки стержня (при $\alpha = 0$):

$$\tilde{w}(0) = 0, \quad \tilde{u}(0) = 0, \quad \tilde{\varphi}(0) = \varphi(0) = 0.$$

С учетом этих геометрических граничных условий, полагаем

$$\tilde{w} = w_0 \sin^2 \alpha, \quad \tilde{u} = u_0 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha), \quad \tilde{\varphi} = \varphi = \varphi_0 \sin \alpha. \quad (19)$$

Вычислим производные функций, входящих в (17). Используя соотношения (2), (4), (7), (8), (12), (19), получим

$$u = \tilde{u} n_{11} + \tilde{w} n_{12} = u_0 n_{11} (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) + w_0 n_{12} \sin^2 \alpha =$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} n_{11} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} n_{12} = n_{11} \frac{1}{R} \frac{d}{d\alpha} u_0 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) + n_{12} \frac{d}{d\alpha} w_0 \sin^2 \alpha =$$

$$= \frac{1}{R} (u_0 (1 + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - 2w_0 \sin^2 \alpha) \cos \alpha =$$

$$= \frac{2}{R} (u_0 - w_0) \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad (21)$$

$$w = \tilde{u} n_{21} + \tilde{w} n_{22} = u_0 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) \sin \alpha + w_0 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad (22)$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} n_{21} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} n_{22} =$$

$$= n_{21} \frac{1}{R} u_0 (1 + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) + n_{22} \frac{1}{R} w_0 2 \sin \alpha \cos \alpha =$$

$$= \frac{2}{R} (u_0 \sin^3 \alpha + w_0 \cos^2 \alpha \sin \alpha), \quad (23)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\varphi_0}{R} \frac{d\varphi}{d\alpha} = \frac{\varphi_0}{R} \cos \alpha. \quad (24)$$

Следует обратить внимание на то, что в этом методе, в соответствии с (8), при вычислении производных функций направляющие косинусы не дифференцируются. В формулах (20), (22) связанные с направляющими косинусами множители выделены жирным шрифтом. Для вычисления производной $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{R} \frac{d}{d\alpha}$ можно использовать соотношения (20) и (22) если учесть, что производная $\frac{d}{d\alpha}$ направляющих косинусов (множителей формулах (20), (22), выделенных жирным шрифтом) равна нулю.

С учетом (19), условие (18) можно записать в следующем виде:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1}{2} \delta \left[EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + EJ_z \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + GA \left(\frac{dw}{dx} + \varphi \right)^2 \right] - \delta' W \right\} da =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \left[EA \left(\frac{du}{dx} \right) \delta \left(\frac{du}{dx} \right) + EJ_z \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) \delta \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) + GA \left(\frac{dw}{dx} + \varphi \right) \delta \left(\frac{dw}{dx} + \varphi \right) \right] - \frac{F}{R} \delta^* \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \delta w \right\} da$$

$$= 0.$$

Используя формулы (21), (23), (24), находим

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[EA \left(\frac{2}{R} (u_0 - w_0) \sin^2 \alpha \cos \alpha \right) \delta \left(\frac{2}{R} (u_0 - w_0) \sin^2 \alpha \cos \alpha \right) + \right.$$

$$+ EJ_z \frac{\varphi_0}{R} \cos \alpha \delta \left(\frac{\varphi_0}{R} \cos \alpha \right) +$$

$$+ GA \left(\frac{2}{R} (u_0 \sin^3 \alpha + w_0 \cos^2 \alpha \sin \alpha) + \varphi_0 \sin \alpha \right) \cdot$$

$$\left. \delta \left(\frac{2}{R} (u_0 \sin^3 \alpha + w_0 \cos^2 \alpha \sin \alpha) + \varphi_0 \sin \alpha \right) \right] = \frac{\pi F}{2R} \delta u_0. \quad (25)$$

Группируя слагаемые и вычисляя входящие в (25) интегралы, получим следующую систему алгебраических уравнений.

$$u_0 (EA + 5GA) + w_0 (GA - EA) + 3GAR \varphi_0 = 4FR$$

$$u_0 (GA - EA) + w_0 (EA + GA) + \varphi_0 GAR = 0 \quad (26)$$

$$3u_0 GA + w_0 GA + 2\varphi_0 R \left(\frac{EJ_z}{R^2} + GA \right) = 0$$

Решение этой системы уравнений

$$u_0 = \frac{FR^3}{2EJ_z} \left[1 + \frac{2EJ_y(EA + GA)}{R^2GA(2EA + GA)} \right],$$

$$w_0 = \frac{FR^3}{2EJ_y} \left[1 + 4 \frac{EJ_z}{R^2GA} \left(1 - \frac{3(EA + GA)}{2(2EA + GA)} \right) \right],$$

$$\varphi_0 = - \frac{F R^2}{E J_y} .$$

Подставляя в эти формулы $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, получим

$$u_0 = \frac{F R^3}{2 E J_y} \left[1 + \frac{J_z}{A R^2} \left\{ \frac{4 (1 + \nu)(3 + 2\nu)}{5 + 4\nu} \right\} \right] \quad (27)$$

$$w_0 = \frac{F R^3}{2 E J_y} \left[1 + \frac{J_z}{A R^2} \left\{ \frac{8 (1 + \nu)(1 + 2\nu)}{10 + 8\nu} \right\} \right] \quad (28)$$

$$\varphi_0 = - \frac{F R^2}{E J_z} \quad (29)$$

Отметим, у стержней малой кривизны толщина поперечного сечения h значительно меньше радиуса кривизны продольной оси стержня R , а $h^2/R^2 \ll 1$. При получении формул для деформаций, слагаемыми порядка h/R по сравнению с единицей обычно пренебрегают. Поэтому, полученные решения на основе различных моделей могут отличаться на величины порядка h/R .

Коэффициент Пуассона $0 \leq \nu \leq 0,5$, и легко убедиться, что входящие в равенства (27), (28) множители в фигурных скобках, изменяются в интервале от 0,8 до 3,4, т.е. являются величинами порядка 1. Для стержней малой кривизны $J_z/(A R^2)$ – величина порядка $\frac{h^2}{R^2} \ll 1$. Так, для стержня с прямоугольным поперечным сечением с размерами сторон b и h , $J_z = bh^3/12$, $A = bh$, $J_z/(A R^2) = h^2/12R^2 \ll 1$. Для круглого сечения радиуса r , $J_z = \pi r^4/4$, $A = \pi r^2$, $J_z/(A R^2) = r^2/4R^2 \ll 1$. Пренебрегая в формулах (27), (28) величинами порядка h^2/R^2 по сравнению с единицей, получим

$$u_0 = \frac{F R^3}{2 E J_z}, \quad w_0 = \frac{F R^3}{2 E J_z}, \quad \varphi_0 = - \frac{F R^2}{E J_z}. \quad (30)$$

В справочнике [17] представлено решение рассмотренной задачи с учетом гипотез Бернулли и условия не растяжимости продольной оси стержня. Получено

$$u_0 = w_0 = \frac{F R^3}{2 E J_z}. \quad (31)$$

Условие не растяжимости продольной оси стержня можно записать в виде $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$. Очевидно, что в соответствии с формулой (21) для $\frac{\partial u}{\partial x}$, это условие будет выполняться, если положить $u_0 = w_0$. В этом случае, полагая в (19) $w_0 = u_0$, из условия стационарности функционала Лагранжа (17) получим выражения для u_0 , w_0 в виде (30).

Таким образом, с точностью до величин порядка h^2/R^2 , данные решения на основе описанного здесь метода совпадают с известными результатами.

4. Заключение

1. В данной работе представлены аналитические решения, для криволинейных стержней, которые показывают, что поставленная цель исследования достигнута: метод расчета напряженно-деформированного состояния криволинейных стержней с использованием соотношений, справедливых для прямолинейных стержней, применим и при аналитической реализации алгоритма.

2. Сравнение полученных формул для перемещений и углов поворота стержней при различных видах нагружения с опубликованными в научной литературе данными иллюстрирует их хорошее согласование.

3. Приведенные аналитические решения подтверждают правильность основных положений метода, широко использованного ранее с применением численных алгоритмов расчетов.

4. Показана сравнительная простота и универсальность предложенного метода расчета стержневых систем.

Как отмечается в научных публикациях по использованию криволинейных структур в строительстве, в XXI веке практически во всех странах появляются сооружения в форме аналитически не задаваемых поверхностей, возникла архитектура произвольных форм. Эта особенность нашего времени определяет достоинство и возможности широкого использования описанного здесь метода, т. к. он основан на использовании при расчетах простейших формул для деформаций прямолинейного стержня. Поэтому наиболее ярко его достоинства проявляются при расчете криволинейных систем неканонической формы.

Список литературы / References

1. Papkova I.V., Krysko A.V., Barulina M.A., Krysko V.A. Mathematical Modeling of the Nonlinear Dynamics Components of Nanoelectromechanical Sensors taking into Account Thermal, Electrical and Noise Impacts – 26th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, ICINS 2019: Proceedings. 2019; 8769406.
2. Кривошапко С.Н. Оболочки и стержневые структуры в форме аналитически не задаваемых поверхностей в современной архитектуре // Строительство и реконструкция. 2020. № 3 (89). С. 20-30. [Krivoshapko S.N. Shells and rod structures in the form of analytically undefined surfaces in modern architecture // Construction and reconstruction. 2020. № 3 (89). P. 20-30.]
3. Krivoshapko S.N. Shell structures and shells at the beginning of the 21st century // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. Том 17. № 6. 2021. С. 553–561. [Krivoshapko S.N. Shell structures and shells at the beginning of the 21st century // Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings. 2021. № 17(6). P. 553–561.]
4. Кривошапко С.Н. О параболическом изгибании плоского металлического листа в торсовую конструкцию // Технология машиностроения. 2020. № 11. С. 14–24. [Krivoshapko S.N. On parabolic bending of a flat metal sheet into a torso structure // Technology of mechanical engineering. 2020. №11. P. 14-24.]
5. Papkova I.V., Krysko A.V., Krysko V.A. Theory and Methods for Studying the Nonlinear Dynamics of a Beam-Plate Nano Resonator Taking into Account the Temperature and Strain Fields Connection in Additive Color Noise – 27th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, ICINS 2020. Proceedings. 2020; 9133824.
6. Papkova I.V., Krysko A.V., Saltykova O.A., Krysko V.A., Zakharova A.A. Contact interaction of flexible Timoshenko beams with small deflections // Journal of Physics: Conference Series. 2018; 012087.
7. Saltykova O.A., Papkova I.V., Krysko V.A. Chaotic dynamics of two beams described by the kinematic hypothesis of the third approximation in the case of small clearance // Journal of Physics: Conference Series. 2018; 012102.
8. Krysko V.A., Yakovleva T.V., Papkova I.V., Saltykova O.A., Pavlov S.P. The contact interaction of size-dependent and multimodulus rectangular plate and beam // Journal of Physics: Conference Series. 2019; 032021.
9. Kayumov R.A., Muhamedova I.Z., Tazyukov B.F. // Parameter determination of hereditary models of deformation of composite materials based on identification method, J. Phys.: Conf. Ser., 973. 2018. Art. 012006, P. 1–8. doi: 10.1088/1742-6596/973/1/012006.
10. Каюмов Р.А., Тазюков Б.Ф., Мухамедова И.З., Шакирзянов Ф.Р. // Определение жесткостных параметров композитного материала по результатам испытаний панелей на устойчивость, Ученые записки Казанского университета. Сер. Физ.-матем. науки, № 1 (161). 2019. С. 75–85. [Kayumov R.A., Tazyukov B.F., Mukhamedova I.Z., Shakirzyanov F.R. // Determination of stiffness parameters of composite material based on the results of panel stability tests, Scientific notes of Kazan University. Ser. Phys.-math. Sciences, No. 1 (161). 2019. P. 75-85.]
11. Kayumov, R.A., Shakirzyanov, F.R. // Large Deflections and Stability of Low-Angle Arches and Panels During Creep Flow. In: Altenbach, H., Eremeyev, V.A., Igumnov, L.A. (eds) Multiscale Solid Mechanics. Advanced Structured Materials, 141. 2021. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-54928-2_18

12. Хайруллин Ф.С., Серазутдинов М.Н. Метод параметризации срединной поверхности тонкостенного элемента конструкции // Известия Вузов. Авиационная техника. Казань. 2006. № 4. С. 14–16. [Khairullin F.S., Serazutdinov M.N. Method of parametrization of the median surface of a thin-walled structural element. News of Universities // Aviation equipment. 2006. № 4; P.14-16.]

13. Сахбиев О.М., Хайруллин Ф.С. Об одном из методов изогометрической аппроксимации кубическими сплайнами // Вестник технологического университета. 2022. № 5 (25). С. 111–114. [Sakhbiev O.M., Khairullin F.S. About one of the methods of isogeometric approximation by cubic splines // Bulletin of the Technological University. 2022. № 5(25). P. 111-114.]

14. Серазутдинов М.Н., Хайруллин Ф.С. Метод расчета криволинейных стержней // Изв. Вузов. Строительство и архитектура. 1991. № 5. С. 104-108. [Serazutdinov M.N., Khairullin F.S. Method of calculating curved rods // News of Universities. Construction and architecture. 1991. № 5. P. 104-108.]

15. Серазутдинов М.Н., Убайдуллоев М.Н. Вариационный метод расчета прямолинейных и криволинейных тонкостенных стержней. Казань: Изд-во КНИТУ, 2016. 144 с. [Serazutdinov M.N., Ubaydulloyev M.N. Variational method of calculation of rectilinear and curved thin-walled rods. Kazan: KNITU Publishing House. 2016. 144 p.]

16. Serazutdinov M.N., Ubaydulloyev M.N. The method of calculating inelastic elements of rod structures under loading, unloading and reloading regimes // IOP Conf. Series: Journal of Physics. 2019; 1158. 042014.

17. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в 3 т. М.: Машиностроение. 1968. Т.1. 821 с. [Strength, stability, fluctuations. Guide in 3 vol. Moscow: Mechanical Engineering. 1968. Vol. 1. 821 p.]

Информация об авторах

Серазутдинов Мурат Нуриевич, доктор физико-математических наук, профессор, Казанский национальный исследовательский технологический университет, г.Казань, Российская федерация
E-mail: serazmn@mail.ru

Information about the authors

Serazutdinov Murat Nurievich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Kazan National Research Technological University, Kazan, Russian Federation
Email: serazmn@mail.ru