



УДК 692

**Ишанова В.И.** – аспирант

E-mail: veronika\_ishanova@mail.ru

**Удлер Е.М.** – кандидат технических наук, профессор

E-mail: udler41@mail.ru

**Казанский государственный архитектурно-строительный университет**

Адрес организации: 420043, Россия, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1

## Развертка поверхности кругового шатра с вогнутой параболической образующей

### Аннотация

Приводятся методика и результаты численного эксперимента по построению развертки тентовой оболочки отрицательной гауссовой кривизны, форма которой образуется вращением ветви параболы вокруг внешней вертикальной оси. Методика основана на применении сетей Чебышева, позволяющая учесть способность тентовых материалов покрывать криволинейные поверхности за счет изменения их геометрической структуры в результате трансформации углов между осями армирования. В работе анализируются влияния значений расчетных геометрических параметров и методики численного моделирования на точность расчета формы развертки оболочки. Приводится пример контура плоской развертки половины шатра.

**Ключевые слова:** тентовые покрытия, мягкие оболочки, пленочно-тканевые ограждения сооружений, сетевой угол, формообразующие свойства материалов, сетчатые оболочки, поверхности отрицательной гауссовой кривизны, шатровые оболочки, сети Чебышева, раскрой тентовых оболочек сложных форм.

Вопросам развертки оболочек в форме поверхностей отрицательной гауссовой кривизны посвящены работы ряда авторов [1- 4]. Особенность таких оболочек в том, что они обычно не разворачиваются на плоскость. Исключение составляют оболочки, выполненные из гибких ортогонально армированных материалов, способных изменять свою геометрию за счет трансформации углов между нитями арматуры. Примерами могут служить пленочно-тканевые и сетчатые материалы и конструкции. В основе методики построения разверток из таких материалов лежит идея русского математика Чебышева П.Л. об использовании сетей с равносторонними ячейками [5, 6]. Авторы данной статьи в своих работах использовали эту идею для разработки алгоритмов и программ расчета разверток некоторых поверхностей. Так в работе [7] обоснованы два метода решения задачи о развертке сферической поверхности, а в работе [8] приводится алгоритм наложения сети Чебышева на поверхность гиперболического параболоида.



Рис. 1. Примеры тентовых шатров. Фотографии с сайта flexpro.ru

В настоящей статье описывается продолжение исследований авторов с целью решения задачи о раскрое весьма распространенной формы оболочек, часто называемой шатровой (рис. 1).

Основной геометрической характеристикой, отличающей шатры, является очертание образующей, вращение которой вокруг оси определяет форму поверхности. В настоящей статье рассматриваются оболочки, образующиеся вращением ветви квадратной параболы, приведенной на рис. 2, вокруг внешней вертикальной оси, как показано на рис. 3.

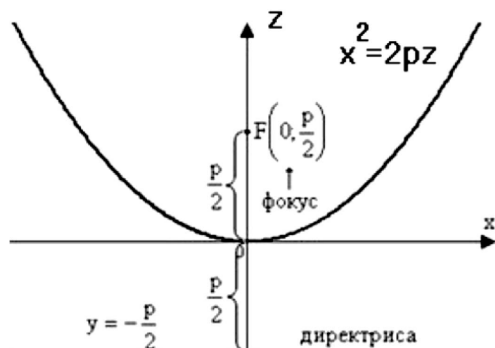


Рис. 2. Общий вид квадратной параболы

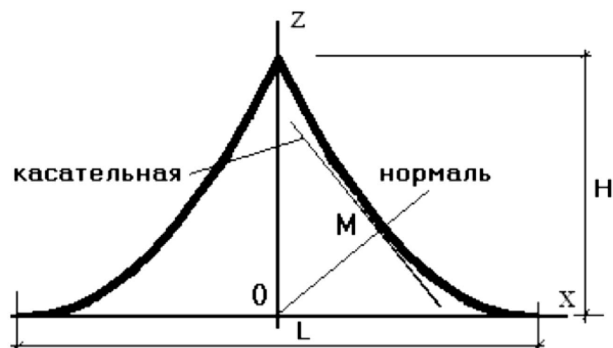


Рис. 3. Сечение шатровой оболочки, полученной вращением ветви параболы вокруг оси OZ

При заданных размерах пролета  $L$  и высоты  $H$ , параметр параболы вычисляется из соотношения (1):

$$p = L^2 / 8H. \quad (1)$$

Для построения развертки методом сетей Чебышева, на поверхность оболочки следует наложить сеть с четырехугольными равносторонними ячейками. Наложению предшествует выбор положения осевых линий сети на поверхности, которые желательно направлять по взаимно ортогональным геодезическим линиям. Это довольно сложно и не всегда возможно. На поверхностях вращения геодезическими являются образующие. Если принять образующую за одну ось, то для построения нормальной к ней второй оси сети предлагается следующий путь. В качестве оси принять линию сечения оболочки плоскостью проходящей через ось OY и нормаль к образующей (рис. 4).

При определении положения точки  $M$ , в которой секущая плоскость пересекает образующую кривую, принято во внимание, что она находится на кратчайшем расстоянии от точки  $O$  до параболы. Тогда координаты точки  $M$  можно вычислить из уравнения кривой (2) и соотношения (3), определяющего длину луча  $OM$ .

$$(L/2 - x)^2 = 2pz, \quad (2)$$

$$S_{OM} = \sqrt{x^2 + z^2}. \quad (3)$$

Эта задача легко решается численно по приведенному ниже алгоритму:

- Присвоить  $S$  значение  $L/2$ ;
- Присвоить  $X$  значение  $0$ ;
- Начало цикла ПОКА с условием  $X$  меньше  $L/2$ ;
- Присвоить  $X$  значение  $X + \text{малое приращение}$ ;
- Вычислить  $Z = F(x)$  из формулы (2);
- Вычислить  $S_{OM}$  по формуле (3);
- Если  $S_{OM}$  меньше  $S$ , то присвоить  $S$  значение  $S_{OM}$  и  $X_m$  значение  $X$ ;
- Конец цикла ПОКА.

Для получения координат других точек искомой линии сечения предлагается использовать значение тангенса угла наклона секущей плоскости, равное отношению координат  $Z_m/X_m$ .

На рис. 4 приведен пример размещения осей сети Чебышева на поверхности шатра с параболической образующей.

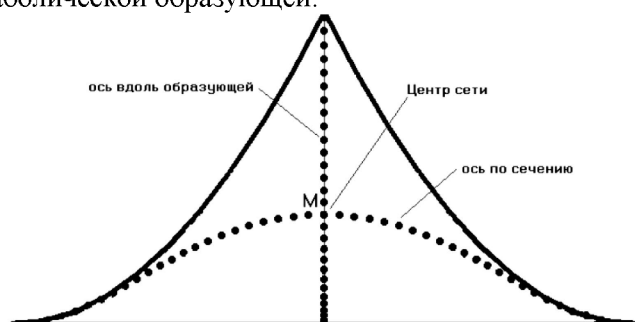


Рис. 4. Взаимно-ортогональные оси для построения сети Чебышева на шатре

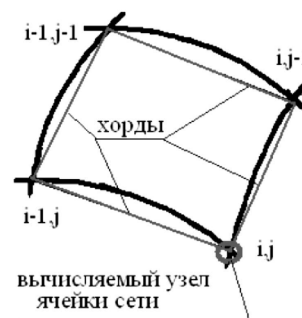


Рис. 5. Схема к расчету координат узлов сети

Наложение сети Чебышева начинается с точки М, являющейся центром сети. В связи с вертикальной симметрией сечения, достаточно определить координаты узлов сети в одной из верхних и одной из нижних ее частей. Как описано в работе [6] задача решается поочередным определением координат четвертых узлов ячеек сети по трем известным. Схема для расчета координат приведена на рис. 5.

$$\begin{aligned} (x_{i,j} - x_{i-1,j})^2 + (y_{i,j} - y_{i-1,j})^2 + (z_{i,j} - z_{i-1,j})^2 &= d^2, \\ (x_{i,j} - x_{i,j-1})^2 + (y_{i,j} - y_{i,j-1})^2 + (z_{i,j} - z_{i,j-1})^2 &= d^2, \\ (r - \sqrt{x^2 + y^2})^2 &= 2pz, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $r = L/2$  – радиус основания шатра.

Система уравнений для расчета (4) использует вместо действительного размера стороны ячейки, представляющей собой дугу, параметр  $d$ , являющийся средним значением длины хорды, показанной на рис. 5. и вычисляемый по формуле (5):

$$d = S/n, \quad (5)$$

где  $S$  – длина образующей шатра,  $n$  – количество ячеек сети на образующей.

Это справедливо для поверхностей с постоянной кривизной. Для оценки возможности применения такого подхода к рассматриваемым оболочкам, в табл. приведены вычисления отклонений в размерах длины дуги и хорды между смежными узлами ячейки в зависимости от различных геометрических параметров оболочек.

Таблица

Отношение пролета к высоте L/H	Длина дуги – стороны ячейки в мм	Расстояние между узлами в мм	Абсолютное отклонение в мм	Относительное отклонение в %
1	58,106	58,085	0,021	0,036
1,25	49,259	49,251	0,008	0,017
1,5	89,99	89,98	0,01	0,011
2	147,89	147,90	0,01	0,004
3	186,799	186,797	0,002	0,001
4	172,17	172,169	0,001	0,006

Из таблицы видно, что при разбивке образующей на 100 ячеек, что является обычной практикой компьютерных расчетов, ошибка в вычислении размеров ячеек не превышает десятой доли процента. Она быстро уменьшается с повышением пологости оболочки, как следствие увеличения пролета и снижения высоты шатра.

Для расчета координат узлов сети на оболочке использовался алгоритм и компьютерная программа, разработанные авторами и изложенные в работе [6]. На рис. 6, в качестве примера, приводится результат расчета наложения сети Чебышева на шатер с параболической образующей. В связи с симметрией оболочки расчет произведен для  $1/4$  части поверхности.

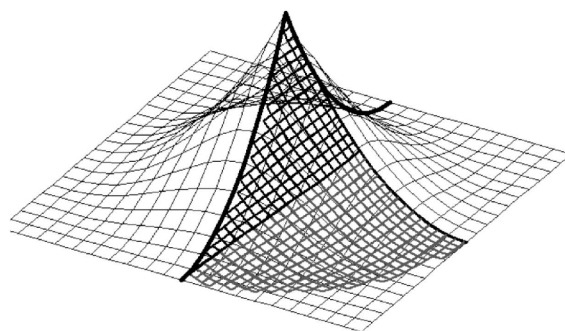


Рис. 6. Сеть Чебышева на ¼ поверхности шатра

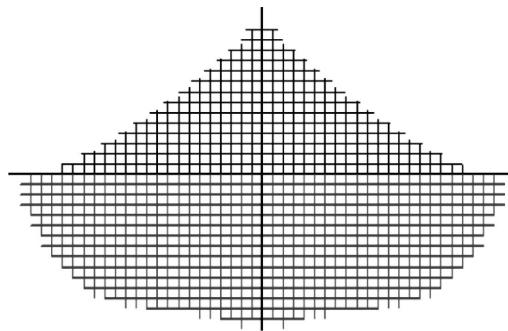


Рис. 7. Развернутая на плоскость сеть, покрывающая половину шатра

Для получения развертки поверхности шатра потребовалось разложить полученную сеть на плоскость, сохраняя ортогональность ее осей. Для этого вычислялись длины всех нитей сети, от осей до контура покрываемого участка шатра. Это производилось по формулам (6):

$$\begin{aligned} l_{k,i} &= n_{k,i} \cdot d + \delta_{k,i}, \\ l_{k,j} &= n_{k,j} \cdot d + \delta_{k,j}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $n_{k,i}, n_{k,j}$  – количество ячеек в различных частях сети, в  $i$ -той горизонтальной нити и  $j$ -той вертикальной;

$\delta_{k,i}, \delta_{k,j}$  – поправки, учитывающие краевой эффект, возникающий в результате неполного заполнения поверхности ячейками сети. Методика их учета в настоящее время дорабатывается.

На рис. 7 приведен результат расчета на примере плоской развертки половины шатровой оболочки, выполненной авторами с помощью специально разработанной для этого подпрограммы.

Таким образом:

1. Проверена применимость для шатров методики развертки, разработанной авторами для сферических оболочек и в виде гиперболического параболоида.
2. Найдено решение для построения сетей Чебышева на шатровых оболочках.
3. Выявлена необходимость уточнить способ расчета границ разверток поверхностей.
4. Желательна проверка применимости методики для иных форм образующих, например, в виде цепной линии, вращение которой приводит к образованию катеноида.

#### Список библиографических ссылок

1. Штолько В.Г. Архитектура сооружений с висячими покрытиями. – Киев.: Будівельник, 1979. – 152 с.
2. Сладков В.А. Типы поверхностей для проектирования форм сетчатых и тканевых покрытий, трансформируемых из плоскости. // «Тенты в мобильных сооружениях». Материалы НТК «Тент-71». – Казань, 1971. – С. 20-30.
3. Сладков В.А., Шишкина Л.Л. Применение ЭВМ для геометрического расчета контура плоской тканевой заготовки, одеваемой на заданный участок поверхности. // «Тенты в мобильных сооружениях». Материалы НТК «Тент-71». – Казань, 1971. – С. 30-35.
4. Попов Е.В. Построение разверток поверхностей одинарной и двойной кривизны. // Международный межвузовский сб. трудов кафедр графических дисциплин, Вып. 5, Н.Новгород, 2000. – 150 с.
5. Чебышев П.Л. О кройке одежды. // Полное собрание сочинений. Том V. – М., 1955. – 220 с.
6. Степанов С.Е. О кройке одежды по Чебышеву. // Соровский образовательный журнал, № 7, 1988. – С. 122-127.

7. Удлер Е.М. Сеть Чебышева на поверхности сферы. // «Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований», № 6, 2014. – 85 с.
8. Ишанова В.И., Пекерман Э.Е., Удлер Е.М. Построение сети Чебышева на поверхности гиперболического параболоида. // Известия КГАСУ, 2013, № 4 (26). – С. 101-105.

**Ishanova V.I.** – post-graduate student

E-mail: veronika\_ishanova@mail.ru

**Udler E.M.** – candidate of technical sciences, professor

E-mail: udler41@mail.ru

**Kazan State University of Architecture and Engineering**

The organization address: 420043, Russia, Kazan, Zelenaya st., 1

### **Sweep the surface of shell circular in plan with the concave parabolic side**

#### **Resume**

In construction practice widely used structures of mechanically stretched soft shells, called in Russian awnings. The typical form for such structures is the surfaces of negative Gaussian curvature. An important issue in the design and fabrication is construction scans of such shells, which, as a rule, can't be deployed on a plane. This article describes the methodology and numerical results of calculation of the sweep of the tent shell, which is formed by rotation of a parabola branch around the outer vertical axis. The technique is based on the using the Chebyshev meshes. Such meshes have cells with equal sides, that allows them to apply smoothly on curved surfaces due to the transformation of angles between the directions of the threads. The article analyzes effect of the geometric parameters of the shell and methods for the numerical calculation on the accuracy of the sweep of the shell. There are given the geometrical scheme and the system of non-linear equations to calculate the coordinates of nodes of the mesh, laid on the surface of the investigated form shell. Also, describes the method of calculating shape of sweep contour on the plane, as a result of the transformation of the constructed mesh from shell to the plane. There is an example of the shape's sweep, allows to produce the shell, using two identical planar elements of mesh structure.

**Keywords:** awning cover, soft shell, film-tissue structures fencing, mesh angle, properties of material to change form, mesh shell surface of negative Gaussian curvature, the hyperbolic paraboloid, the mesh of Chebyshev, tent membrane cutting of complex shapes.

#### **Reference list**

1. Shtolko V.G. Architecture of buildings with hanging coverings. – Kiev: Budivelnik, 1979. – 152 p.
2. Sladkov V.A. Types of surface for mold design and mesh fabric coating, transformed from the plane. // «Tents in mobile building construction». Materials of STC «Tent-71». – Kazan, 1971. – P. 20-30.
3. Sladkov V.A., Shishkina L.L. The use of computers for calculating the geometric contour plane fabric perform is worn on a predetermined portion of the surface. // «Tents in mobile building construction». Materials of STC «Tent-71». – Kazan, 1971. – P. 30-35.
4. Popov E.V. Construction of single-sweep surfaces and double curvature. // International and Intercollegiate Sat work of graphical disciplines. Vol. 5, Nizhni Novgorod, 2000. – 150 p.
5. Chebyshev P.L. On the cutting of clothes. // Complete Works. Volume V. – M., 1955. – 220 p.
6. Stepanov S.E. On the cutting clothes as Chebyshev. // Soros Educational Journal, № 7, 1988. – P. 122-127.
7. Udler E.M. Net of Chebyshev, imposed on surface of sphere. // International magazine of apply and foundation research, № 6, 2014. – 85 p.
8. Ishanova V.I., Pekerman E.E., Udler E.M. About imposition of Chebyshev's meshes by the surface as hyperbolic paraboloid. // News of the KSUAE, 2013, № 4 (26). – P. 101-105.