



УДК 532.5:621.694

Багoutдинова А.Г. – кандидат технических наук, доцент

Нижекамский химико-технологический институт

Адрес: 423570, Россия, г. Нижнекамск, пр. Строителей, 47

E-mail: bagoutdinova@rambler.ru

Золотоносов Я.Д. – доктор технических наук, профессор

E-mail: zolotonosov@mail.ru

Мустакимова С.А. – ведущий программист

E-mail: mustakim@kgasu.ru

Казанский государственный архитектурно-строительный университет

Адрес: 420043, Россия, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1

Математическая модель сопряженной задачи теплообмена закрученного турбулентного течения жидкости в пружинно-витом канале на основе модели турбулентности Менстера

Аннотация

В работе предложена математическая модель трехмерной краевой задачи теплообмена при турбулентном течении вязкой несжимаемой жидкости в пружинно-витом канале. Представленная математическая модель основана на решении осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса, энергии и уравнения теплопроводности стенок канала. Для замыкания системы уравнений Навье-Стокса выбрана двухпараметрическая модель турбулентности Менстера, с учетом геометрии рассматриваемого канала. Предложен также ряд подстановок, позволяющих преобразовать исходную систему уравнений к безразмерному виду и существенно упростить процесс численной реализации в целях получения значений компонентов скорости, давления и температуры в проточной части пружинно-витого канала.

Ключевые слова: математическая модель, теплообмен, турбулентность.

1. Геометрия канала. Пружинно-витой канал представляет собой тугую пружину, витки которой жестко скреплены между собой. В работе [1] приведено подробное описание теплообменной поверхности рассматриваемого канала.

2. Основные уравнения. Основными уравнениями гидродинамики для описания турбулентных течений являются уравнения движения и неразрывности [2]:

$$rv_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + m \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Основными уравнениями теплообмена являются уравнение энергии и уравнение теплопроводности стенок канала:

$$v_j \frac{\partial t}{\partial x_j} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x_j \partial x_j}, \quad \frac{\partial^2 t_c}{\partial x_j \partial x_j} = 0. \quad (2)$$

В системе уравнений (1)-(2) и далее подразумевается суммирование по дважды повторяемому в одночленах индексу.

Применяя осреднение по Рейнольдсу, запишем уравнения движения, неразрывности и энергии в виде:

$$rv_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + m \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-r \overline{v_i' v_j'} \right), \quad \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0, \quad \bar{v}_j \frac{\partial \bar{t}}{\partial x_j} = a \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial x_j} - \overline{v_j' t'} \right). \quad (3)$$

Здесь v_1, v_2, v_3, p, t – актуальные проекции скорости, давление, температура, $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{p}, \bar{t}$ – осредненные по времени их значения, v_1', v_2', v_3', p', t' – пульсационные значения. Система уравнений (3) является незамкнутой. Для замыкания этой системы уравнений воспользуемся моделью Менстера [3]. Эта модель была предложена Менстером

в 1993 году и на сегодняшний день по совокупности своих качеств является одной из лучших среди существующих моделей турбулентности, базирующихся на осредненных по Рейнольдсу уравнениях Навье-Стокса [4].

Модель Менстера представляет собой комбинацию $k-\varepsilon$ и $k-\omega$ моделей, обеспечивающих сочетание лучших качеств этих давно известных моделей. Так $k-\varepsilon$ модель хорошо зарекомендовала себя при расчете свободных и струйных сдвиговых течений, а $k-\omega$ модель обеспечивает существенно более точное описание пристеночных пограничных слоев. С учетом этих обстоятельств Менстером было предложено объединить модели с использованием специально сконструированной для этого эмпирической функции F_1 , обеспечивающей плавный переход от $k-\omega$ модели в пристеночной области к $k-\varepsilon$ модели вдали от стенки. Таким образом, модель Менстера записывается путем суперпозиции моделей $k-\varepsilon$ и $k-\omega$, помноженных соответственно на весовую функцию F_1 и $(1-F_1)$. Функция F_1 конструируется таким образом, чтобы быть равной единице на верхней границе пограничного слоя и стремиться к нулю при приближении к стенке.

Модель, записанная в терминах k (кинетическая энергия турбулентности) и ω (удельная скорость диссипации), записывается в виде:

$$\rho \bar{v}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - \beta^* \rho k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right], \quad (4)$$

$$\rho \bar{v}_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \gamma \frac{\omega}{k} \tau_{ij} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + 2(1-F_1) \rho \sigma_{\omega_2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, \quad (5)$$

$$\tau_{ij} = -\rho \overline{v_i' v_j'} = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}, \quad -\rho \overline{v_j' t'} = \frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial \bar{t}}{\partial x_j}. \quad (6)$$

Эмпирические константы модели определяются через соответствующие константы $k-\varepsilon$ и $k-\omega$ моделей с помощью весовой функции F_1 :

$$\sigma_k = F_1 \sigma_{k_1} + (1-F_1) \sigma_{k_2}, \quad \sigma_\omega = F_1 \sigma_{\omega_1} + (1-F_1) \sigma_{\omega_2}, \quad \beta = F_1 \beta_1 + (1-F_1) \beta_2. \quad (7)$$

Индексы «1» и «2» в (8) относятся соответственно к константам $k-\varepsilon$ и $k-\omega$ моделей:

$$\sigma_{k_1} = 0.85, \quad \sigma_{\omega_1} = 0.5, \quad \beta_1 = 0.075, \quad \sigma_{k_2} = 1.0, \quad \sigma_{\omega_2} = 0.856, \quad \beta_2 = 0.0828, \quad (8)$$

а остальные константы равны:

$$\beta^* = 0.09, \quad \kappa = 0.41, \quad a_1 = 0.31, \quad \gamma = \frac{\beta}{\beta^*} - \frac{\sigma_\omega \kappa^2}{\sqrt{\beta^*}}, \quad Pr_t = 0.9. \quad (9)$$

Весовая функция определяется следующим образом:

$$F_1 = \tanh(\arg_1^4), \quad \arg_1 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right); \frac{4\rho \sigma_{\omega_2} k}{CD_{k\omega} y^2} \right], \quad (10)$$

$$CD_{k\omega} = \max \left(2\rho \sigma_{\omega_2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-20} \right).$$

Здесь y – расстояние от рассматриваемой точки до ближайшей точки твердой поверхности.

Для определения турбулентной вязкости по известным значениям k и ω в модели Менстера используется не стандартное соотношение $\mu_t = \rho k / \omega$, а выражение, базирующееся на известной гипотезе Брэдшоу [5] о пропорциональности напряжения сдвига в пристеночной части пограничного слоя энергии турбулентных пульсаций:

$$\mu_t = \frac{\rho a_1 k}{\max(a_1 \omega, \Omega F_2)}, \quad (11)$$

где:

$$\Omega = \partial V / \partial y, \quad F_2 = \tanh(\arg_2^2), \quad \arg_2 = \max\left(\frac{2\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}; \frac{500\nu}{y^2 \omega}\right). \quad (12)$$

3. Граничные условия. Менгер провел тщательные исследования влияния граничных условий на результаты расчетов и записал универсальную и надежную формулировку, которую можно считать общепринятой.

На твердой стенке кинетическая энергия турбулентности полагается равной нулю, ее удельная диссипация определяется по формуле:

$$\omega = 10 \frac{6\nu}{\beta_1 \Delta y^2}, \quad (13)$$

где ν – молекулярная кинематическая вязкость, $\beta_1 = 0.075$, а Δy – величина первого пристеночного шага сетки.

На входных участках границы расчетной области предлагается следующее условие:

$$\omega = C \frac{U_\infty}{L}, \quad \nu_t = 10^{-3} \nu, \quad k = \nu_t \omega, \quad (14)$$

где U_∞ и L – характерные для данного течения скоростной и линейный масштаб, рекомендованные в [3] значения константы C лежат в диапазоне $1 \div 10$.

4. Построение математической модели с учетом геометрии канала. Рассмотрим трехмерное течение вязкой несжимаемой жидкости в прямом пружинно-витом канале. Совместим ось z цилиндрической системы координат с продольной осью канала, а оси r и φ свяжем с его поперечным сечением (рис.).

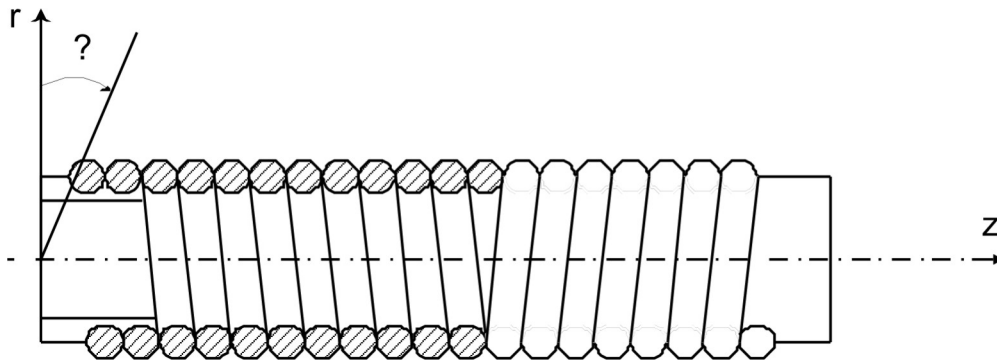


Рис. Пружинно-витой канал. Система координат

Запишем осредненные по Рейнольдсу уравнения в цилиндрической системе координат [1].

Уравнения движения:

$$\begin{aligned} & \overline{v_r} \frac{\partial \overline{v_r}}{\partial r} + \frac{\overline{v_\varphi}}{r} \frac{\partial \overline{v_r}}{\partial \varphi} + \overline{v_z} \frac{\partial \overline{v_r}}{\partial z} - \frac{\overline{v_\varphi}^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial r} + \\ & + \nu \left(\frac{\partial^2 \overline{v_r}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{v_r}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \overline{v_r}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \overline{v_r}}{\partial z^2} - \frac{\overline{v_r}}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \overline{v_\varphi}}{\partial \varphi} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu_t}{\rho} \frac{\partial \overline{v_r}}{\partial r} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\mu_t}{\rho} \frac{\partial \overline{v_r}}{\partial r} + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\mu_t}{\rho} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \overline{v_r}}{\partial \varphi} - \frac{\overline{v_\varphi}}{r} + \frac{\partial \overline{v_\varphi}}{\partial r} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu_t}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{v_r}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{v_z}}{\partial r} \right) \right) - \frac{2}{r} \frac{\mu_t}{\rho} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \overline{v_\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\overline{v_r}}{r} \right); \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{v}_\varphi}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\varphi}{r} \frac{\partial \bar{v}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \bar{v}_\varphi}{\partial z} + \frac{\bar{v}_r \bar{v}_\varphi}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \varphi} + 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\mu_t}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{v}_\varphi}{\partial \varphi} + \bar{v}_r \right) - \frac{1}{3} k \right) + \\ & + \frac{2}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\mu_t}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{v}_\varphi}{\partial \varphi} + \bar{v}_r \right) - \frac{1}{3} k \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{v}_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_\varphi}{\partial z^2} - \frac{\bar{v}_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \varphi} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu_t}{\rho} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \varphi} - \frac{\bar{v}_\varphi}{r} + \frac{\partial \bar{v}_\varphi}{\partial r} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu_t}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{v}_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \varphi} \right) \right) + \frac{2}{r} \left(\frac{\mu_t}{\rho} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \varphi} - \frac{\bar{v}_\varphi}{r} + \frac{\partial \bar{v}_\varphi}{\partial r} \right) \right); \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\varphi}{r} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial z^2} \right) + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\mu_t}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} \right) \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\mu_t}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{v}_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \varphi} \right) \right) + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu_t}{\rho} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} - \frac{1}{3} k \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} + \frac{\bar{v}_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = 0. \quad (18)$$

Уравнение распространения тепла (энергии):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{t}}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\varphi}{r} \frac{\partial \bar{t}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \bar{t}}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(ar \frac{\partial \bar{t}}{\partial r} + \frac{r}{\rho} \frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial \bar{t}}{\partial r} \right) + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{a}{r} \frac{\partial \bar{t}}{\partial \varphi} + \frac{\mu_t}{\rho r Pr_t} \frac{\partial \bar{t}}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(a \frac{\partial \bar{t}}{\partial z} + \frac{\mu_t}{\rho Pr_t} \frac{\partial \bar{t}}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Уравнение теплопроводности стенок канала:

$$\frac{\partial^2 t_c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_c}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t_c}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t_c}{\partial z^2} = 0. \quad (20)$$

Уравнение переноса для кинетической энергии турбулентности:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial k}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\varphi}{r} \frac{\partial k}{\partial \varphi} + \frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\mu_t}{\rho} \left[\left(\frac{\partial \bar{v}_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \varphi} - \frac{\bar{v}_\varphi}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial \bar{v}_\varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + \\ & + 2 \frac{\mu_t}{\rho} \left[\left(\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\bar{v}_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} \right)^2 \right] - \beta^* k \omega + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) r \frac{\partial k}{\partial r} \right] + \\ & + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{1}{r} \frac{\partial k}{\partial \varphi} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial z} \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Уравнение переноса для удельной скорости диссипации:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\varphi}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 2 \gamma \frac{\omega}{k} \frac{\mu_t}{\rho} \left[\left(\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\bar{v}_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} \right)^2 \right] - \beta \omega^2 + \\ & + \gamma \frac{\omega}{k} \frac{\mu_t}{\rho} \left[\left(\frac{\partial \bar{v}_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \varphi} - \frac{\bar{v}_\varphi}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial \bar{v}_\varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + \\ & + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right] + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial z} \right] + \\ & + 2(1 - F_1) \sigma_{\omega_2} \frac{1}{\omega} \left(\frac{\partial k}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial k}{\partial \varphi} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} + \frac{\partial k}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Для однозначной разрешимости системы уравнений (15)-(22) запишем граничные условия: на входе в канал: для скорости: $\bar{v}_r = 0$, $\bar{v}_j = 0$, $\bar{v}_z = u_0$; для температуры жидкости $\bar{t} = t_0$; для температуры стенки $t_c = t_0$; для кинетической энергии турбулентности и ее удельной диссипации $k = k_0$, $w = w_0$ – условия (14);

на выходе: «мягкие» условия $\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial \bar{v}_\varphi}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial \bar{t}}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial k}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$;

на твердой стенке: для скорости – условия прилипания $\bar{v}_r = 0$, $\bar{v}_z = u_0$; для температуры $\bar{t} = t_c$, $\lambda \frac{\partial \bar{t}}{\partial r} = \lambda_c \frac{\partial t_c}{\partial r}$, где t_c – температура стенки канала; для кинетической энергии турбулентности $k = 0$, ее удельной диссипации – условия (13).

Решение системы (15)-(22) будем искать в виде:

$$\begin{aligned} \bar{v}_r = u_0 F(\bar{r}, \bar{j}, \bar{z}), \quad \bar{v}_j = u_0 G(\bar{r}, \bar{j}, \bar{z}), \quad \bar{v}_z = u_0 H(\bar{r}, \bar{j}, \bar{z}), \quad \bar{p} - p_0 = u_0^2 r P(\bar{r}, \bar{j}, \bar{z}), \\ k = u_0^2 K(\bar{r}, \bar{j}, \bar{z}), \quad w = u_0^{-1} g E(\bar{r}, \bar{j}, \bar{z}), \quad \bar{t} = t_0 T(\bar{r}, \bar{j}, \bar{z}), \quad \bar{t}_c = t_0 T_c(\bar{r}, \bar{j}, \bar{z}), \end{aligned} \quad (23)$$

где $\bar{r} = r/r_0$, $\bar{z} = z/r_0$ – безразмерные переменные F , G , H , P , K , E , T , T_c – безразмерные функции, g – ускорение свободного падения, u_0 – начальная скорость, p_0 – начальное давление, r_0 – радиус подложки канала, d_{eqv} – эквивалентный диаметр канала, ν – кинематический коэффициент вязкости, a – коэффициент температуропроводности, $Re = u_0 d_{eqv} / \nu$ – число Рейнольдса, $Re_t = u_0 d_{eqv} / \nu_t$ – турбулентное число Рейнольдса, $Fr = u_0^2 / (r_0 g)$ – число Фруда.

Подставляя формулы (23) в уравнения (15)-(22), получим безразмерные уравнения.

Уравнения движения:

$$\begin{aligned} F \frac{\partial F}{\partial \bar{r}} + \frac{G}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} + H \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} - \frac{G^2}{r} = -\frac{\partial P}{\partial \bar{r}} + \frac{d_{eqv}}{r_0 Re_t} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{z}^2} - \frac{F}{r} - \frac{2}{\bar{r}^2} \frac{\partial G}{\partial \varphi} \right) + \\ + 2 \frac{d_{eqv}}{r_0} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\frac{1}{Re_t} \frac{\partial F}{\partial \bar{r}} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial K}{\partial \bar{r}} + \frac{2}{r} \frac{d_{eqv}}{r_0} \frac{1}{Re_t} \frac{\partial F}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{r} \frac{d_{eqv}}{r_0} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{Re_t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{G}{r} + \frac{\partial G}{\partial \bar{r}} \right) \right) + \\ + \frac{d_{eqv}}{r_0} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{Re_t} \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial H}{\partial \bar{r}} \right) \right) - \frac{2}{r} \frac{d_{eqv}}{r_0} \frac{1}{Re_t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial \varphi} + \frac{F}{r} \right); \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} F \frac{\partial G}{\partial \bar{r}} + \frac{G}{r} \frac{\partial G}{\partial \varphi} + H \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} + \frac{FG}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \frac{d_{eqv}}{r_0} \frac{1}{Re_t} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial \bar{z}^2} - \frac{G}{\bar{r}^2} + \frac{2}{\bar{r}^2} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) + \\ + 2 \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\frac{d_{eqv}}{r_0} \frac{1}{Re_t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial \varphi} + \frac{F}{r} \right) - \frac{1}{3} K \right) + \frac{2}{r} \left(\frac{d_{eqv}}{r_0} \frac{1}{Re_t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial \varphi} + \frac{F}{r} \right) - \frac{1}{3} K \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\frac{d_{eqv}}{r_0} \frac{1}{Re_t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{G}{r} + \frac{\partial G}{\partial \bar{r}} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{d_{eqv}}{r_0} \frac{1}{Re_t} \left(\frac{\partial G}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right) \right) + \frac{2}{r} \left(\frac{d_{eqv}}{r_0} \frac{1}{Re_t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{G}{r} + \frac{\partial G}{\partial \bar{r}} \right) \right); \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} F \frac{\partial H}{\partial \bar{r}} + \frac{G}{r} \frac{\partial H}{\partial \varphi} + H \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} = -\frac{\partial P}{\partial \bar{z}} + \frac{d_{eqv}}{r_0} \frac{1}{Re_t} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{z}^2} \right) + \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\frac{d_{eqv}}{r_0} \frac{1}{Re_t} \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial H}{\partial \bar{r}} \right) \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{d_{eqv}}{r_0} \frac{1}{Re_t} \left(\frac{\partial G}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right) \right) + 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{d_{eqv}}{r_0} \frac{1}{Re_t} \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} - \frac{k}{3} \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{r}} + \frac{F}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial \varphi} + \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (28)$$

Уравнение распространения тепла (энергии):

$$F \frac{\partial T}{\partial \bar{r}} + \frac{G}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} + H \frac{\partial T}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{r} \frac{d_{eqv}}{r_0} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\frac{1}{Re_t} \frac{\partial T}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{d_{eqv}}{r_0} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{Re_t} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{d_{eqv}}{r_0} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{Re_t} \frac{\partial T}{\partial \bar{z}} \right). \quad (29)$$

Уравнение теплопроводности стенок канала:

$$\frac{\partial^2 T_c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_c}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_c}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T_c}{\partial z^2} = 0. \quad (30)$$

Уравнение переноса для кинетической энергии турбулентности:

$$\begin{aligned} F \frac{\partial K}{\partial r} + \frac{G}{r} \frac{\partial K}{\partial \varphi} + H \frac{\partial K}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re}_t} \frac{d_{eqv}}{r_0} \left[\left(\frac{\partial G}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{G}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \varphi} + \frac{\partial G}{\partial z} \right)^2 \right] + \\ + 2 \frac{1}{\text{Re}_t} \frac{d_{eqv}}{r_0} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial \varphi} + \frac{F}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{d_{eqv}}{r_0} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{\sigma_k}{\text{Re}_t} \right) \frac{\partial K}{\partial z} \right] - \\ - \frac{\beta^*}{Fr} KE + \frac{d_{eqv}}{r_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{\sigma_k}{\text{Re}_t} \right) r \frac{\partial K}{\partial r} \right] + \frac{d_{eqv}}{r_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{\sigma_k}{\text{Re}_t} \right) r \frac{\partial K}{\partial \varphi} \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Уравнение переноса для удельной скорости диссипации:

$$\begin{aligned} F \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{G}{r} \frac{\partial E}{\partial \varphi} + H \frac{\partial E}{\partial z} = \\ = \gamma \frac{1}{\text{Re}_t} \frac{E}{K} \frac{d_{eqv}}{r_0} \left[\left(\frac{\partial G}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{G}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \varphi} + \frac{\partial G}{\partial z} \right)^2 \right] + \\ + 2\gamma \frac{1}{\text{Re}_t} \frac{E}{K} \frac{d_{eqv}}{r_0} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial \varphi} + \frac{F}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{\beta}{Fr} E^2 + \\ + \frac{1}{r} \frac{d_{eqv}}{r_0} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{\sigma_\omega}{\text{Re}_t} \right) r \frac{\partial E}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \frac{d_{eqv}}{r_0} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{\sigma_\omega}{\text{Re}_t} \right) r \frac{\partial E}{\partial \varphi} \right] + \\ + \frac{d_{eqv}}{r_0} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{\sigma_\omega}{\text{Re}_t} \right) \frac{\partial E}{\partial z} \right] + 2(1-F_1)\sigma_{\omega_2} \frac{Fr}{E} \left(\frac{\partial K}{\partial r} \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial K}{\partial \varphi} \frac{\partial E}{\partial \varphi} + \frac{\partial K}{\partial z} \frac{\partial E}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Граничные условия на входе: $F = 0, G = 0, H = 1, T = 1, T_c = 1, K = K_0, E = E_0$; на выходе: $\frac{\partial F}{\partial z} = 0, \frac{\partial G}{\partial z} = 0, \frac{\partial H}{\partial z} = 0, \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \frac{\partial K}{\partial z} = 0, \frac{\partial E}{\partial z} = 0$; на твердой стенке: $F = 0, H = u_0, T = T_c, K = 0, \lambda \frac{\partial T}{\partial r} = \lambda_c \frac{\partial T_c}{\partial r}$.

Здесь $a_t = \frac{\mu_t}{\rho Pr_t}, Pe_t = \frac{u_0 d_{eqv}}{a + a_t}$ – турбулентное число Пекле.

Заключение. Разработана математическая модель задачи теплообмена при турбулентном течении вязкой несжимаемой жидкости в пружинно-витом канале. Численная реализация полученной модели позволит определить поле скоростей, давления и температур при течении ньютоновских сред в пружинно-витом канале и уточнить методику инженерного расчета теплообменного оборудования.

Список литературы

1. Багоутдинова А.Г., Золотонос Я.Д., Мустакимова С.А. Моделирование турбулентного течения в прямых пружинно-витых каналах // Известия КГАСУ, 2012, № 1 (19). – С. 81-88.
2. Лойцянский Л.И. Механика жидкости и газа. Изд. 6-е. – М.: Наука, 1987.
3. Menter F.R. Zonal two-equation $k-\omega$ turbulence models for aerodynamic flows, AIAA Paper 1993-2906.
4. Гарбарук А.В., Стрелец М.И., Шур М.Л. Моделирование турбулентности в расчетах сложных течений: учебное пособие. – СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2012.
5. Bradshaw P., Ferriss D.H., Atwell N.P. Calculation of boundary layer development using the turbulent energy equation, J. Fluid Mech., 1967, v. 28. – P. 593-616.

Bagoutdinova A.G. – candidate of technical sciences, associate professor
E-mail: bagoutdinova@rambler.ru

Nizhnekamsk Chemical-Technological Institute

The organization address: 423570, Russia, Nizhnekamsk, Builders st., 47

Zolotonosov Ya.D. – doctor of technical sciences, professor

E-mail: zolotonosov@mail.ru

Mustakimova S.A. – leading programmer

E-mail: mustakim@kgasu.ru

Kazan State University of Architecture and Engineering

The organization address: 420043, Russia, Kazan, Zelenaya st., 1

**Mathematical model of the interfaced problem of heat exchange
of the twirled turbulent liquid flow in the spring-twisted channel based
on the Menter turbulence model**

Resume

The article considers the steady-state turbulent flow of a viscous incompressible fluid in a spring-twisted channel. The surface of such a channel is a spring which is rigidly fastened coils. A mathematical model of conjugate heat transfer problem based on the Reynolds averaged equations of motion, continuity, energy and thermal conductivity of the channel walls with boundary conditions is developed. To close the system of equations two-parameter model of turbulence Menter is used, which is in all of its qualities is one of the best currently existing models of turbulence.

Considering the geometry of the given channel, the mathematical model equations written in a cylindrical coordinate system.

Substitutions, allowed to write the equations in dimensionless form are proposed.

Numerical implementation of the resulting model will let to determine the velocity field, pressure and temperature in the flow of Newtonian environment in the spring-twisted channels and to clarify the methods of engineering calculation of heat exchange equipment.

Keywords: mathematical model, heat exchange, turbulence.

References

1. Bagoutdinova A.G., Zolotonosov Ya.D., Mustakimova S.A. Modelling of turbulent flow in straight line spring-twisted channels // *Izv. KGASU*, 2012, № 1 (19). – P. 81-88.
2. Loicanskii L.I. Fluid mechanic. Izd. 6-e. – M., «Nauka», 1987.
3. Menter F.R. Zonal two-equation $k - \omega$ turbulence models for aerodynamic flows, AIAA Paper 1993-2906.
4. Garbaruk A.V., Strelets M.H., Shur M.L. Modeling of turbulence in the calculation of complex flows: a manual. – Petersburg: Polytechnic Univ. Press, 2012.
5. Bradshaw P., Ferriss D.H., Atwell N.P. Calculation of boundary layer development using the turbulent energy equation, *J. Fluid Mech.*, 1967, v. 28. – P. 593-616.