УДК 532.517
Посохин В.Н. – доктор технических наук, профессор
E-mail: posohin@kgasu.ru
Кареева Ю.Р. – аспирант
E-mail: kareeva_87@mail.ru
Казанский государственный архитектурно-строительный университет
Маклаков Д.В. – доктор физико-математических наук, профессор
E-mail: Dmitri.Maklakov@ksu.ru
Казанский (Приволжский) федеральный университет

РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЯ В ЗОНЕ РАЗВОРОТА ПЛОСКОЙ СТРУИ В ТУПИКЕ

АННОТАЦИЯ

В рамках теории потенциальных течений идеальной жидкости определяется поле скорости в зоне разворота плоской стесненной струи в тупике.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: плоская струя, тупик, зона разворота, идеальная жидкость, конформные преобразования.

Posokhin V.N. – doctor of technical sciences, professor
Kareeva J.R. – post-graduate student
Kazan State University of Architecture and Engineering
Maklakov D.V. – doctor of physical and mathematical sciences, professor
Kazan (Volga Region) Federal University

CALCULATION OF THE FLOW IN THE U-TURN ZONE OF THE PLANE JET NEAR THE CHANNEL

ABSTRACT

In the framework of the potential flow theory of an ideal fluid the velocity field in the U-turn zone of a plane jet near the dead end of a channel is determined.

KEYWORDS: plane jet, impasse, turn area, ideal fluid, conformal transformations.

Известно, что ширина струи в тупике возрастает до некоторого сечения, после чего следует зона разворота; струя распадается, образуя обратный поток [1].

Воспользовавшись схемой, предложенной Г.Н. Абрамовичем [2], попытаемся рассчитать характеристики течения в зоне разворота. Симметричная половина тупика показана на рис. 1а. Отрезки OF и OC – начало и конец зоны разворота. Твердая стенка (разрез MOA) разделяет струю и обратный поток. Детали течений до и после разворота не учитываем, полагая, что в бесконечно удаленных точках M и A расположены, соответственно, источник и сток интенсивностью L/2 (L – расход воздуха в сечении струи, где ширина ее максимальна). Течение полагаем потенциальным.

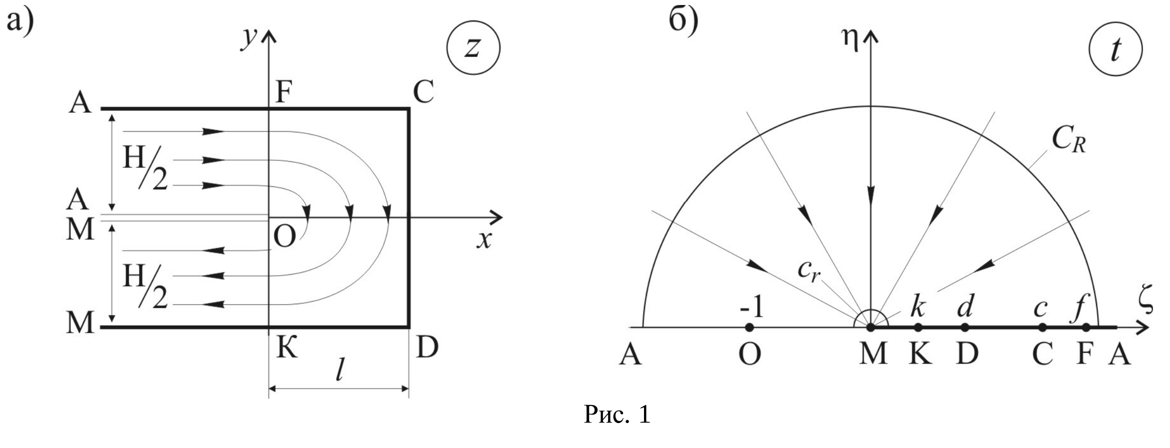

Рис. 1

Для решения воспользуемся теорией функций комплексной переменной. Отобразим область течения в физической плоскости $z = x + iy$ на верхнюю полуплоскость $t = x + iy$ с указанным на рисунках 1а, 1б соответствием точек. В плоскости t имеем простое течение: сток в начале координат – точка М и источник на бесконечности в точке А.

Отображение находится с помощью формулы Кристоффеля-Шварца, которая в нашем случае имеет вид

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{H}{2p} \cdot \frac{t+1}{t\sqrt{(t-d)(t-c)}}; z = C_1 \int \frac{(t+1)\,dt}{t\sqrt{(t-d)(t-c)}} + C_2 = C_1 \int_{-1}^{t} \frac{(t+1)\,dt}{t\sqrt{(t-d)(t-c)}}, \qquad (1)$$

где C_1, d, c – неизвестные параметры отображения.

Используем теорию вычетов, согласно которой

$$z = C_1 \int_{C_r} \frac{dz}{dt} dt = C_1 p\, i Res \frac{dz}{dt}(t=0). \qquad (2)$$

Здесь $Res \frac{dz}{dt}(t=0)$ – вычет функции $\frac{dz}{dt}$ в точке М$(t=0)$; c_r – полуокружность бесконечно малого радиуса (рис. 1б).

Опуская подробности, запишем сразу значение вычета

$$Res \frac{dz}{dt}(t=0) = -\frac{1}{dc}.$$

В точке М$(t=0)$ z совершает скачок на $iH/2$ (рис.1а) и согласно (2) $\frac{iH}{2} = -C_1 \frac{ip}{dc}$.

Отсюда следует, что

$$C_1 = -\frac{H\sqrt{dc}}{2p}. \qquad (3)$$

Вычислим контурный интеграл (1) по полуокружности C_R бесконечного радиуса. При $t \to \infty$ подынтегральное выражение упрощается. Учтем также, что в точке А z совершает скачок на $-iH/2$. В результате имеем:

$$\frac{iH}{2} = C_1 \int_{C_r} \frac{dt}{t}.$$

Параметрическое уравнение окружности C_R запишется в виде $t = \mathrm{Re}^{iL}(R \circledR \infty,\ 0 \le \alpha \le \pi)$.

Используем известную формулу для вычисления контурных интегралов

$$\int_{C_k} f(t)\,dt = \int_0^p f[t(a)]\,t'(a)\,da$$

и находим

$$z = \int_{C_R} f(t)\,dt = \int_0^p C_1 \frac{\mathrm{Re}^{ia}\, i da}{\mathrm{Re}^{ia}} = C_1 p\, i.$$

Таким образом, $C_1 p\, i = -i\dfrac{H}{2}$ и значит

$$C_1 = -\frac{H}{2p}, \quad \sqrt{dc} = 1. \tag{4}$$

Используя полученный результат, после взятия интеграла (1), имеем

$$z = -\frac{H}{2p}\left[2\ln\left(\sqrt{t-d}+\sqrt{t-c}\right)+2\ln\left(\sqrt{dt-1}+\sqrt{ct-1}\right)-\ln t-4\ln\left(\sqrt{1+c}+\sqrt{1+d}\right)-ip\right]. \tag{5}$$

В точке C $t = c,\ z = l + i\dfrac{H}{2}$, поэтому

$$z = l + i\frac{H}{2} = -\frac{H}{2p}\left[\ln\left(c-d\right)+\ln\left(c^2-1\right)-\ln c-\ln\left(\sqrt{1+c}+\sqrt{1+c}\right)^4-ip\right]. \tag{6}$$

Выделяя действительную часть (6), после преобразований, получаем

$$c = \left(\frac{1+e^{-\frac{pl}{H}}}{1-e^{-\frac{pl}{H}}}\right)^2, \quad d = \left(\frac{1-e^{-\frac{pl}{H}}}{1+e^{-\frac{pl}{H}}}\right)^2. \tag{7}$$

Таким образом, определены параметры отображения d, c и коэффициент C_1.

Найдем теперь комплексный потенциал и комплексную сопряженную скорость течения. Очевидно, что комплексный потенциал

$$W = j + iy = -\frac{L}{2p}\ln t, \quad \frac{dW}{dt} = -\frac{L}{2p}\frac{1}{t} \tag{8}$$

Комплексная сопряженная скорость –

$$\frac{dW}{dz} = v_x - iv_y = \frac{dW}{dt}\frac{dt}{dz}. \tag{9}$$

.

Объединяя равенства (1), (8), получаем

$$\frac{dW}{dz} = \frac{L}{H}\frac{\sqrt{\left(t-d\right)\left(t-c\right)}}{t+1}. \tag{10}$$

Уравнения (5), (10), в принципе, дают решение поставленной задачи.

Найдем скорость на отрезке FC – ось течения где $z = x + i\dfrac{H}{2},\ \dfrac{dW}{dz} = v_x,\ c \le t \le f$. Из (5) имеем

$$x = -\frac{H}{2p}\left[2\ln\sqrt{t-d}+\sqrt{t-c}+2\ln\left(\sqrt{ct-1}+\sqrt{dt-1}\right)-\ln t-4\ln\left(\sqrt{1+d}+\sqrt{1+c}\right)\right]. \tag{11}$$

При x=0 отсюда определяем параметрическую координату точки F(t=f). Далее, задавая значения t в интервале $c \le t \le f$, по уравнениям (10), (11) находим распределение скорости на FC.

На отрезке CD $z = l + iy,\ \dfrac{dW}{dz} = -v_y,\ c \le t \le d$.

Выделяя мнимые части уравнений (5), (10), имеем

$$y = -\frac{H}{2p}\left(2arctg\sqrt{\frac{c-d}{t-d}} + 2arctg\sqrt{\frac{1-dt}{ct-1}} - p\right); \quad (12)$$

$$v_y = -\frac{L}{H}\frac{at(1+t)(c-d)}{(bt+an+tdb)^2+(nt-ab+tnc)^2}, \quad (13)$$

где $a = \sqrt{t(d+c)-t^2-1},\ b = \sqrt{ct-1},\ n = \sqrt{1-dt}$.

На отрезке DK $z = x - i\dfrac{H}{2},\ \dfrac{dW}{dz} = v_x,\ t_k \le t \le d$.

В точке K x=0 и уравнение принимает вид

$$x = -\frac{H}{2p}\left[2\ln\left(\sqrt{d-t}+\sqrt{c-t}\right)+2\ln\left(\sqrt{1-ct}+\sqrt{1-dt}\right)-\ln t-4\ln\left(\sqrt{1+d}+\sqrt{1+c}\right)\right]=0. \quad (14)$$

Отсюда определяется параметрическая координата t_k .

На этом отрезке равенство (10) принимает вид

$$\frac{dW}{dz} = v_x = -\frac{L}{H}\frac{a_1b_1+a_1n_1}{(b_1+n_1)(a_1-t)+tdn_1+tdb_1}, \quad (15)$$

где $a_1 = \sqrt{t^2-t(d+c)+1},\ b_1 = \sqrt{1-tc},\ n_1 = \sqrt{1-td}$.

Задавая $t_k \le t \le d$, по уравнениям (14) (15) определяем координаты x и соответствующие им значения скорости v_x.

На рис. 2 проведены графики зависимостей параметров *c, d, f, k* от безразмерного параметра *l/H.*

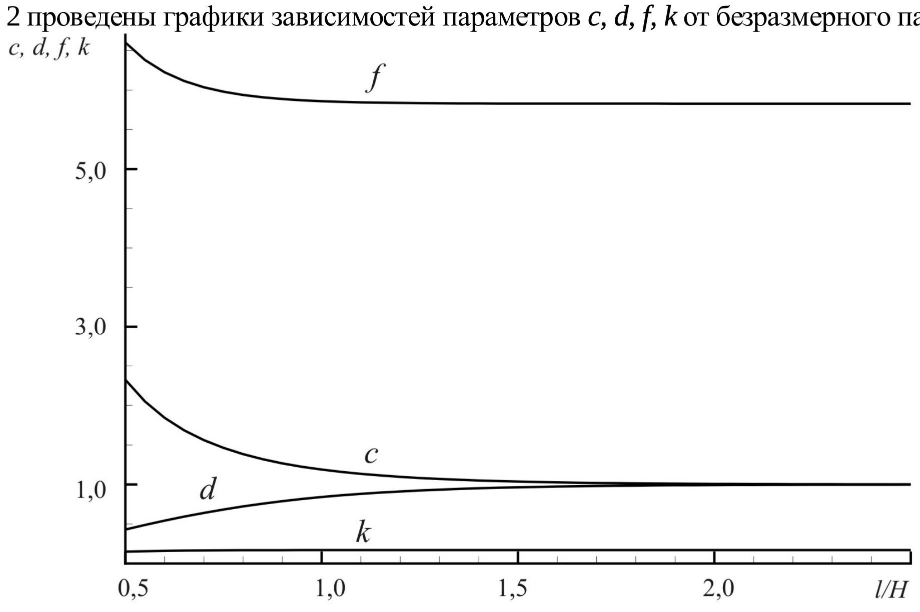

Рис. 2. Зависимость параметров *c, d, f, k* от *l/H*

Рис. 3 иллюстрирует результаты расчета относительной скорости для тупиков по приведенным выше формулам. Напомним, что L – расход в стесненной струе в сечении, за которым следует зона разворота.

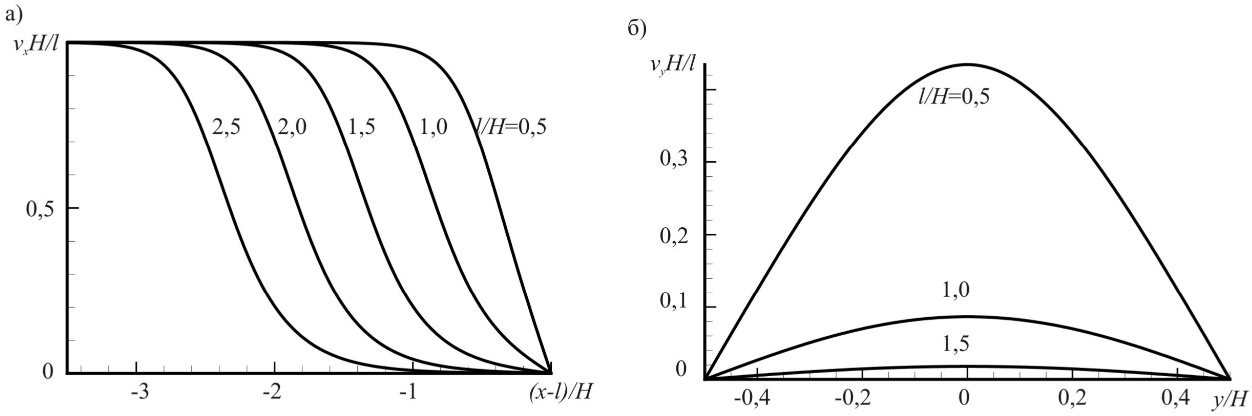

Рис. 3. Распределение скоростей на стенках тупиков при различных l/H: а – отрезок FC; б – отрезок CD

Полученные результаты могут быть использованы для расчета воздухораспределения в помещениях при тупиковой схеме подачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахарев В.А., Трояновский В.Н. Основы проектирования и расчета отопления и вентиляции с сосредоточенным выпуском воздуха. – М.: Профиздат, 1958. – 215 с.
2. Абрамович Г.Н. Теория турбулентных струй. – М.: Физматгиз, 1960. – 715 с.