



УДК 539.3

**Р.А. Каюмов** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой сопротивления материалов и основ теории упругости

**И.В. Строганов** – кандидат технических наук, доцент

**В.Ф. Строганов** – доктор химических наук, профессор, заведующий кафедрой химии и инженерной экологии в строительстве

Тел.: (843) 526-93-43, e-mail: [svf@ksaba.ru](mailto:svf@ksaba.ru)

**А.Т. Мухаметшин** – аспирант

**Казанский государственный архитектурно-строительный университет (КазГАСУ)**

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОВЕДЕНИЯ ПОЛИМЕРНОГО МАТЕРИАЛА С «ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ»\*

### АННОТАЦИЯ

Рассмотрены модели деформирования материала с «памятью формы» (МПФ), состоящего из смеси двух полимеров (эпоксидного и каучука) для стеклообразного и высокоэластического состояний.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** математическая модель, полимерный материал, память формы.

**R.A. Kayumov** – doctor of physical-mathematical sciences, professor, head of Materials Resistance and Foundations of the Elasticity Theory department

**I.V. Stroganov** – candidate of technical science, associate professor

**V.F. Stroganov** – doctor of chemical sciences, professor, head of Chemistries and Engineering Ecology in Building department

Tel.: (843) 526-93-43, e-mail: [svf@ksaba.ru](mailto:svf@ksaba.ru)

**A.T. Muhametshin** – post-graduate student

**Kazan State University of Architecture and Engineering (KSUAE)**

## MATHEMATICAL MODELS OF BEHAVIOR OF POLYMER MATERIAL “SHAPE MEMORY”\*

### ABSTRACT

The models of deformation of the material with “shape memory” (MPF), consisting of a mixture of two polymers (epoxy and rubber) for the glassy and highly elastic states.

**KEYWORDS:** mathematical model, a polymeric material, shape memory.

В настоящее время ведущая роль в развитии промышленности отводится новым эффективным технологиям и материалам, в том числе и полимерным, спектр применения которых весьма многообразен и открывает новые направления в исследованиях. Одним из таких направлений является формирование эффекта «памяти формы» (ЭПФ) для полимерных материалов и изделий и его применение в различных отраслях техники. Необходимо отметить, что большинство работ по формированию ЭПФ посвящено только термопластам: полиэтилену, полипропилену и т.д. [1-5]. Вопрос получения ЭПФ у сетчатых полимеров (реактопластов) мало изучен [5]. Согласно классификации, предложенной Кембриджским университетом, выделяют три варианта реализации

ЭПФ в полимерных материалах [1]: 1) начальная форма получается путем формирования из расплава или жидкого субстрата. При необходимости проводится отверждение сшивающими агентами или облучением. В дальнейшем осуществляется деформирование (ориентирование) при температуре около или выше  $T_c$  (температуры стеклования) или  $T_{пл}$  (температуры плавления). Это состояние фиксируется в процессе охлаждения, а восстановление формы достигается нагреванием образца выше  $T_c$  или  $T_{пл}$ ; 2) использование полимеров с реверсивной формой, управляемой фото- или электрическими реакциями полимеров; 3) использование полимерных материалов, у которых ЭПФ контролируется химическими реакциями. Для сетчатых полимеров наиболее приемлем первый вариант.

Для математического описания МПФ возможны различные подходы. В литературе в основном

\*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 08-01-00628-а).



рассматриваются сплавы металлов [6, 7-10]. Поэтому их авторы используют модели упругопластических материалов, свойства которых зависят от температуры [9, 10]. Для описания свойства памяти формы вводится новый параметр процесса – удельная доля мартенсита [9, 10]. Ниже приводятся простые модели для описания МПФ из смеси полимерных материалов, требующие меньшего количества механических характеристик по сравнению с моделями для сплавов, но достаточные для отыскания параметров, определяющих процесс соединения труб муфтами, изготовленными из МПФ.

Рассмотрим композиционный материал с памятью формы, образованный из смеси двух фаз (см. рис. 1) – эпоксидной смолы (первая фаза) и каучука (вторая фаза).

Этот материал обладает следующими свойствами. Во-первых, первая фаза имеет температуру стеклования  $T_c$ , ниже которой ее можно считать чисто упругой. Во-вторых, при температурах выше  $T_c$  она быстро переходит в высокоэластическое состояние.

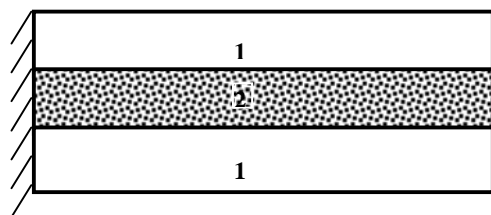


Рис.1

Считаем, что вторая фаза сохраняет свои упругие свойства и при температурах, превышающих  $T_c$ , и не имеет остаточных деформаций.

Тогда при температуре  $T_T = T_c + \Delta T$  рассматриваемый материал приобретает высокоэластические свойства, а при охлаждении он становится почти полностью упругим. Свойства памяти формы проявляются следующим образом. Если при температуре  $T_T$  наш материал с памятью формы (МПФ) подвергнуть деформации ориентирования (например, увеличить радиус муфты с помощью так называемого процесса дорнирования), а затем охладить до рабочей температуры  $T_p$ , то в нем появятся остаточные деформации  $\epsilon_0$ . Они вызовут внутри тела напряжения  $S_{(2)}$  во второй фазе и напряжения с обратным знаком  $S_{(1)}$  в первой фазе. Они будут уравновешивать друг друга, и это равновесие будет сохраняться достаточно долго, поскольку обе фазы при  $T = T_p < T_c$  являются почти чисто упругими.

При нагревании МПФ и достижении температуры

$T > T_c$  жесткость первой фазы падает, она деформируется под воздействием напряжения  $S_{(2)}$ , происходит релаксация напряжений  $S_{(1)}$  и их уменьшение до весьма малых значений. Это приводит к снижению и  $S_{(2)}$ , поскольку противодействие напряжению  $S_{(2)}$  уменьшается, в пределе – до нуля. Нулевые значения  $S_{(2)}$  означают, согласно закону Гука, что вторая фаза восстановила свою форму, а значит, восстановил форму и весь композит.

При разработке определяющих соотношений для МПФ будем использовать векторно-матричную символику, позволяющую компактно представлять основные уравнения механики, а именно будем использовать векторы  $S$  и  $\epsilon$ , которые вводятся соотношениями:

$$\sigma = \{\sigma^{11}, \sigma^{22}, \sigma^{33}, \sigma^{23}, \sigma^{13}, \sigma^{12}\}$$

$$\epsilon = \{\epsilon_{11}, \epsilon_{21}, \epsilon_{13}, 2\epsilon_{23}, 2\epsilon_{13}, 2\epsilon_{12}\}$$

Матрицы будем обозначать прописными буквами, за исключением температуры  $T$ .

Для разработки модели поведения МПФ используем следующие экспериментальные факты и упрощающие предположения. Во-первых, свойства полимеров хорошо описываются наследственной теорией, согласно которой деформация может быть представлена в виде:

$$\epsilon = E^{-1}\sigma + \int_0^t H(t-\tau, \sigma, T)\sigma d\tau. \quad (1)$$

Здесь  $E$  – матрица упругих характеристик,  $H$  – матрица реологических характеристик.

При малых уровнях нагружения это соотношение можно считать линейным относительно напряжений, т.е.

$$H = H_0(t-t, T) \cdot S(t). \quad (2)$$

Во-вторых, для большинства полимеров  $H_0$  хорошо аппроксимируется функцией Абеля в виде

$$H_0 = \frac{C(T)}{(t-t)^{\alpha(T)}}, \quad (3)$$

$$|C(T)| > 0, \quad 1 > \alpha(T) > 0. \quad (4)$$

Первое неравенство в (4) и далее означает положительную определенность матрицы  $C$ .

В-третьих, относительно первой фазы сделаем предположение о том, что она относится к классу так называемых простых материалов, т.е. матрица-функция  $H_0$  пропорциональна некоторой функции



температуры и не зависит от уровня напряжений. Это приводит к следующей форме  $H_0$ :

$$H_0 = a(T)H_{00}(t - t), \quad (5)$$

где  $a(T) > 0$  – скалярная функция,  $H_{00}$  – положительно определенная матрица, вид которой для изотропного материала можно определить из анализа соотношений, приведенных, например, в [13, 14].

Отметим, что в случае нелинейно-наследственного полимера при описании его поведения хорошие результаты дает иерархический подход [11]. Согласно этому подходу коэффициенты  $H_0$  считаются зависящими от инвариантов тензора напряжений. В случае изотропной среды можно считать их зависящими только от интенсивности напряжений  $S_i$ , что хорошо подтверждается некоторыми экспериментами [12]. Тогда можно соотношения (3), (4) с учетом (5) записать в виде:

$$H_0 = a(T) \frac{C(S_i)}{(t - t)a(S_i)}, \quad (6)$$

$$|C(\sigma_i)| > 0, \quad 0 < \alpha(\sigma_i) < 1. \quad (7)$$

Для определения функции  $a(T)$  необходимо провести ряд испытаний первой фазы МПФ при различных температурах.

Для уменьшения объема работ по определению механических характеристик МПФ рассмотрим упрощающие предположения, основанные на приведенных выше свойствах МПФ, но приводящие к различным моделям МПФ.

Рассмотрим сначала процесс прямого преобразования, под которым будем понимать процесс деформирования МПФ, начиная с момента изготовления, т.е. с состояния, в котором еще нет памяти формы.

Первая модель основана на пренебрежении упругими деформациями первой фазы при температурах, больших температуры стеклования  $T_c$ . Такая модель применима в таких случаях, когда время деформирования МПФ не играет большой роли и может быть не ограничено технологическими процессами или техническими условиями.

Определяющие соотношения при низких температурах, т.е. до температуры стеклования  $T_c$ , можно представить в виде (используются соотношения структурной теории композиционных материалов):

$$T < T_c : \sigma = E \varepsilon = E_1 V_1 + E_2 V_2. \quad (8)$$

Здесь  $E, E_1, E_2$  матрицы упругих характеристик МПФ, первой и второй фазы соответственно;  $V_1, V_2$  – удельные объемы первой и второй фаз.

Принимая, что ввиду неограниченности времени при  $T = T_0 \geq T_c$  в первой фазе произошла полная релаксация напряжений, соотношения между заданной деформацией  $e_{00}$  и напряжениями  $\sigma_1, \sigma_2$  в фазах, а также напряжением  $\sigma_0$  в композите, как в гомогенном теле, можно представить в виде

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = E_2 V_2 \varepsilon_{00}, \quad \sigma_0 = E_2 V_2 \varepsilon_{00} \quad (9)$$

Охладим теперь тело до температуры  $T = T_p < T_c$  при постоянной деформации  $e_{00}$ . После снятия нагрузки получим остаточную деформацию ориентирования

$$e_0 = (1 - E E_1^{-1} V_2) e_{00}.$$

Эта модель исключительно проста, поскольку для отыскания остаточной деформации ориентирования необходимо знать только константы  $T_c, E_1, E_2, V_1, V_2$ , а задача прямого преобразования сводится к задаче теории упругости.

Рассмотрим вторую модель. В этой модели необходимо учитывать соотношения наследственной теории (1)-(4). Для простоты будем рассматривать линейную теорию (2). Тогда определяющие соотношения для композита можно записать в виде:

$$e = E^{-1} s + \int_0^t H_0(t - t, T) s(t) dt, \quad (10)$$

$$E^{-1} = E_1^{-1} V_1 + E_2^{-1} V_2, \quad (11)$$

$$H_0 = (H_0)_{(1)} V_1 = a(T) \cdot (H_{00})_{(1)} V_1. \quad (12)$$

Здесь  $E^{-1}, E_1^{-1}, E_2^{-1}$  – матрицы, обратные к  $E, E_1, E_2$ , а  $(H_0)_{(1)}$  – ядро ползучести для первой фазы.

Для температур  $T < T_c$  здесь также можно считать, что деформации являются чисто упругими

$$a(T) = 0 \text{ при } T < T_c. \quad (13)$$

Тогда  $a(T)$  – это функция типа функции Хевисайда:

$$h(T - T_c) = \begin{cases} 0 & \text{при } T < T_c \\ 1 & \text{при } T \geq T_c \end{cases} \quad (14)$$

С использованием  $h(T - T_c)$  функцию  $a(T)$  можно представить в виде:

$$a(T) = f(T) \cdot h(T - T_c), \quad (15)$$

где  $f(T)$  – некоторая гладкая функция. Для функции Хевисайда можно использовать известные аппроксимации гладкими функциями, например,



$$h(T - T_c) \approx 2^{-e^{-b(T-T_c)}}, \quad b \gg 1.$$

Рассмотрим теперь процесс обратного преобразования. Это процесс восстановления формы, которую имело тело до деформации при прямом преобразовании (ориентированной деформации). Таким образом, считаем, что тело имеет начальную деформацию удлинения  $\epsilon_0$  к началу обратного преобразования (см. рис. 2). Пусть тело начинает разогреваться. При  $T > T_c$  композит начнет деформироваться под воздействием напряжений, которые имеют место во второй фазе, поскольку в первой при этом начнется процесс релаксации.

Рассмотрим сначала первую модель. Считая время релаксации неограниченным, получим, что на упругие связи, противодействующие деформации МПФ (см. рис. 2), воздействует только вторая фаза. Это воздействие в виде реакции  $p$  можно найти по соотношению:

$$p = S_2 = E_2(e_0 - e)V_2, \quad T > T_c \quad (16)$$

Здесь  $e$  – обратная деформация МПФ (см. рис. 2).

Если связь абсолютно жесткая, то  $e = 0$ , и воздействие на нее будет максимальным. Если же связей нет, то напряжения в МПФ к концу обратного преобразования станут нулевыми.

Рассмотрим теперь случай, аналогичный соединению жестких труб муфтой, изготовленной из МПФ. Пусть абсолютно жесткая связь начинает действовать только после выборки некоторого зазора  $\Delta$ . Тогда при восстановлении формы на эту связь (после полной релаксации напряжений в первой фазе) будет воздействовать нагрузка, определяемая формулой

$$p = E_2(e_0 - \Delta)V_2.$$

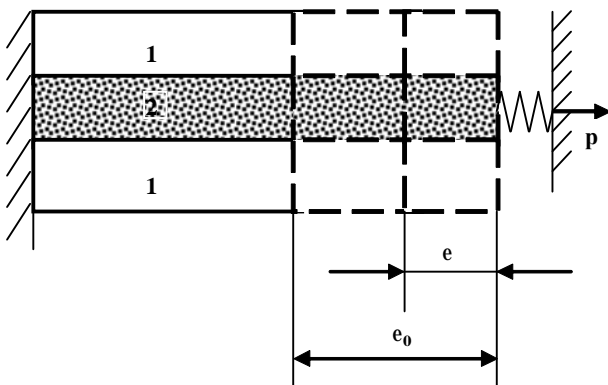


Рис. 2

Рассмотрим далее вторую модель.

В этом случае после достижения температурой величин выше  $T_c$  начнется процесс ползучести

первой фазы и упругая разгрузка второй. Для определения давления на связи получим следующие соотношения:

1. Условия совместности деформации на границе фаз

$$G_n e_1 = G_n e_2, \quad (17)$$

где индекс « $n$ » означает, что матрица  $G$ , обеспечивающая условия совместности, определена на границе раздела фаз.

2. Уравнения равновесия на границе фаз:

$$C_n S_1 = C_n S_2, \quad (18)$$

здесь  $C_n$  – матрицы, обеспечивающие условия статики на границе фаз.

3. Соотношение упругости для второй фазы

$$S_2 = E_2(e_0 - e_2), \quad (19)$$

Где, как и прежде,  $e_0$  – начальная остаточная деформация, приобретенная МПФ к концу прямого преобразования.

4. Соотношения наследственной теории в первой фазе:

$$\epsilon_1 = E_1^{-1} \sigma_1 + \int_0^t H_1(t - \tau, T) \sigma_1(\tau) d\tau. \quad (20)$$

5. Условия закрепления

$$\Gamma u = 0, \quad x \in S, \quad (21)$$

где  $u$  – вектор перемещений,  $S$  – закрепленная поверхность,  $\Gamma$  – дифференциальный оператор, обеспечивающий условия закрепления.

Очевидно, что решить систему (17)-(20) в строгой постановке в общем случае не представляется возможным. Поэтому рассмотрим задачу отыскания  $\epsilon$  для одномерной задачи, изображенной на рис. 2. Сначала исследуем вариант, когда образец из МПФ не ограничен какими-либо связями (см. рис. 1). Пусть композит имеет начальную деформацию  $e_0$ . Так как обе фазы работают совместно, то деформация МПФ, первой и второй фаз одинаковы:

$$e = e_1 = e_2. \quad (22)$$

Следовательно, физические соотношения примут вид:

$$S_2 = E_2(e_0 - e), \quad (23)$$

$$= E_1^{-1} \sigma_1 + \int_0^t H_1(t - \tau) \sigma_1(\tau) d\tau. \quad (24)$$

Уравнения равновесия имеют вид:

$$S_1 V_1 + S_2 V_2 = 0. \quad (25)$$

Найдя  $S_2$  из (25) и подставив в (23), получим выражение для  $\sigma_1$ . Тогда из (24) вытекает интегральное уравнение для определения деформации МПФ:



$$\int_0^t H_1(t-t)E_2(e_0 - e) \frac{V_2}{V_1} dt + E_1^{-1}E_2(e_0 - e) \frac{V_2}{V_1} + e = 0. \quad (26)$$

Для ее решения нужно применять численные методы. В простейшем случае, с помощью метода Эйлера, можно использовать следующий алгоритм.

1. Рассматриваемый интервал времени разбиваем на  $m$  подинтервалов времени  $\Delta t$ .

2. Обозначим через  $e^{(k)}$  значения  $\varepsilon$  в моменты времени  $t_{(k)}$ .

3. На интервале времени  $(t_{k-1}, t_k)$  деформации аппроксимируем линейными функциями, т.е.

$$e = e^{(k)} \frac{t-t_{k+1}}{t_k - t_{k+1}} + e^{(k+1)} \frac{t-t_k}{t_{k+1} - t_k}. \quad (27)$$

4. Для каждого момента времени  $t_k$  записываем уравнение (26)

$$t_0 = 0:$$

$$E_1^{-1}E_2(\varepsilon_0 - \varepsilon^{(0)}) \frac{V_2}{V_1} + \varepsilon_0 = 0 \quad (28)$$

$$t = t_1 :$$

$$\int_0^{t_1} H_1(t_1 - \tau)E_2 \left( \varepsilon_0 - \left[ \varepsilon^{(0)} \frac{t-t_1}{t_0 - t_1} + \varepsilon_1 \frac{t-t_0}{t_1 - t_0} \right] \right) \frac{V_2}{V_1} dt + E_1^{-1}E_2(\varepsilon_0 - \varepsilon^{(1)}) \frac{V_2}{V_1} + \varepsilon^{(1)} = 0 \quad (28)$$

Поскольку  $H_1(t_1 - t)$  – известная функция, то в уравнениях (28) интегралы могут быть вычислены. Таким образом, получаем рекуррентную систему уравнений для определения деформаций  $e^{(k)}$  МПФ в моменты времени  $t_k$ .

Теперь рассмотрим случай, изображенный на рис. 2, т.е. случай, когда на образец из МПФ накладываются упругие связи. Пусть известна ее реакция  $p$  на деформацию  $\xi$ :

$$p = E_c \xi. \quad (29)$$

Тогда уравнения равновесия примут вид:

$$S_1 V_1 + S_2 V_2 = p. \quad (30)$$

Если связь начинает действовать только после выборки некоторого зазора  $\Delta$ , то

$$d = e - \Delta, \quad p = E_c(e - \Delta). \quad (31)$$

Таким образом, уравнение равновесия примет вид:

$$S_1 V_1 + S_2 V_2 = E_c(e - \Delta). \quad (32)$$

Физические соотношения (19), (20) не изменятся. Тогда из (22)-(24), (32) получаем систему уравнений относительно деформации образца из МПФ при обратном преобразовании

$$S_2 = (E_c(e - \Delta) - S_1 V_1) / V_2 = E_2(e_0 - e)$$

$$S_1 = \frac{V_2}{V_1} \left[ E_2(e - e_0) + \frac{E_c}{V_2}(e - \Delta) \right]$$

$$\int_0^t H_1(t-\tau) \frac{V_2}{V_1} \left[ E_2(\varepsilon - \varepsilon_0) + \frac{E_c}{V_2}(\Delta - \varepsilon) \right] d\tau + E_1^{-1} \frac{V_2}{V_1} \left[ E_2(\varepsilon - \varepsilon_0) + \frac{E_c}{V_2}(\Delta - \varepsilon) \right] + \varepsilon = 0. \quad (33)$$

Решение его проводится аналогично предыдущему случаю.

Найдя  $e(t)$ , можно теперь с помощью соотношения (31) определить реакцию связи (например, силу обжатия труб) в любой момент времени. Если же стоит задача определения времени  $t^*$ , необходимого для того, чтобы выбрать зазор между связью и образцом, то из (33), полагая  $\varepsilon(t^*) = \Delta$ , получаем уравнение относительно  $t^*$ . И в этом случае необходимо привлекать какие-либо численные методы.

Полученные результаты применим для расчета поверхностных сил обжатия труб, соединяемых с помощью муфт, изготовленных из МПФ. Для упрощения задачи делаем следующие предположения.

1. Труба и муфта имеют малые по сравнению с радиусами толщины  $h_T$  и  $h_M$  (индексами «Т» и «М» в дальнейшем обозначается принадлежность трубе и муфте).

2. В виду тонкостенности трубы и муфты эффектом Пуассона в поперечном сечении можно пренебречь.

3. Зазор  $\Delta$  между муфтой и трубой мал по сравнению с радиусами муфты и трубы.

4. Краевым эффектом в трубах и муфте можно пренебречь, считая напряженное состояние безмоментным.

Рассматривая отсеченную часть соединения (см. рис. 3), получим, что после соприкосновения муфты и трубы напряжения в них будут связаны уравнением равновесия

$$q \cdot R_T \cong S_T h_T. \quad (34)$$

Следовательно, можно из (33), (34) найти

$$q \cong \frac{h_M}{R_T} S_M \cong \frac{S_T h_T}{R_T}. \quad (35)$$





Из рис. 3 следует, что

$$\sigma_T h_T = -\sigma_M h_M$$

Связь деформаций труб с  $S_T$  запишем в виде

$$S_T = \tilde{E}_T e_T, \tilde{E}_T = E_T / (1 - n_T^2) \quad (36)$$

Здесь  $n_T$  – коэффициент Пуассона материала трубы. Аналогично для муфты:

$$S_M = \tilde{E}_M e_M, \tilde{E}_M = E_M / (1 - n_M^2) \quad (37)$$

Используем первую модель МПФ, т.е. считаем, что время для обратного преобразования (восстановления формы) не ограничено. Тогда к моменту соприкосновения трубы и муфты напряжения  $S_M = S_T = 0$ . В дальнейшем муфте остается выбрать только часть заданной при дорнировании деформации  $e_0$ . Для ее определения рассмотрим выражения для деформации труб и муфты в кольцевом направлении.

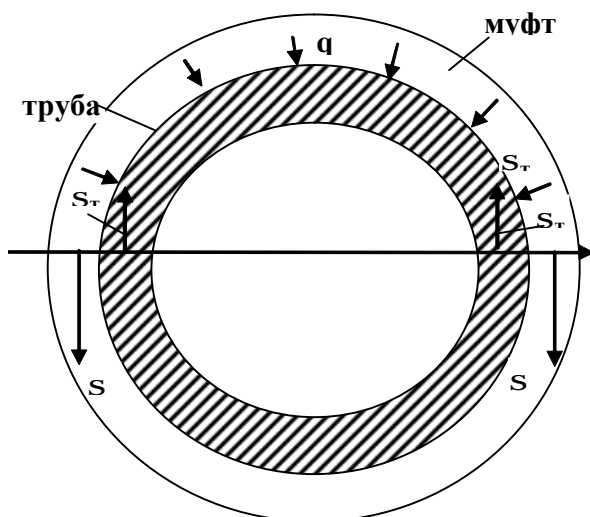


Рис. 3

$$\varepsilon_M = \frac{2\pi(R_M + \Delta R_M) - 2\pi R_M}{2\pi R_M} = \frac{\Delta R_M}{R_M}, \quad (38)$$

$$\varepsilon_T = \frac{2\pi(R + \Delta R_T) - 2\pi R_T}{2\pi R_T} = \frac{\Delta R_T}{R_T}, \quad (39)$$

где  $R_T, R_M$  – первоначальные радиусы трубы и муфты.

Ввиду малости толщин трубы и муфты можно считать, что

$$\Delta R_M \approx \Delta R_m, R_M \approx R_m \quad (40)$$

$$e_M = e_T = e \quad (41)$$

Следовательно, если муфта была дорнирована, а радиус ее увеличился на  $\Delta R_M^0$ , то из (38) получаем:

$$\varepsilon_M^0 = \frac{\Delta R_M^0}{R_M} \quad (42)$$

Если  $d$  – зазор между дорнированной муфтой и трубой, то к моменту их соприкосновения остается не выбранной деформация

$$\varepsilon_M^{ост} = \varepsilon_M^0 - \frac{\delta}{R_M}. \quad (43)$$

Тогда напряжения в муфте будут:

$$\sigma_M = E_M (\varepsilon_M^{ост} - \varepsilon) = E_M V_2 \left( \varepsilon_M^0 - \frac{\delta}{R_M} - \varepsilon \right). \quad (44)$$

Для отыскания  $\varepsilon$  воспользуемся уравнением равновесия (34). С учетом (44) получим:

$$E_T \varepsilon \cdot h_T = E_M V_2 \left( \varepsilon_M^0 - \frac{\delta}{R_M} - \varepsilon \right) h_M. \quad (45)$$

Отсюда вытекает выражение для  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{E_M V_2 h_M (\varepsilon_M^0 - \delta / R_M)}{E_T h_T + E_M V_2 h_M} \quad (46)$$

Используя закон упругости (36) и соотношение (35), получим поверхностную силу обжатия труб (давление на трубы):

$$q = \frac{1}{R_T R_M} \frac{E_M V_2 h_M (\Delta R_M^0 - \delta)}{1 + E_M h_M / (h_T E_T) V_M}. \quad (47)$$

Поскольку прочность соединения труб с муфтой зависит от толщины слоя клея, остающегося после обжатия концов соединяемых труб, а эта толщина зависит от давления  $q$ , то формула (47) позволяет оптимизировать размеры муфты и ее механические характеристики. В частности, из (47) вытекает, что  $q$  тем больше, чем больше толщина муфты, а также чем больше удельный объем и жесткость ее второй фазы. Из (47) вытекает также, что  $q$  зависит не от степени дорнирования  $\Delta R_M^0$ , а от разницы  $\Delta R_M^0$  и зазора между муфтой и трубой.

Таким образом, первая математическая модель поведения полимерного материала с «памятью формы» позволяет достаточно просто провести первичный расчет муфтового соединения. Более точный анализ задачи с использованием второй модели требует использования численных методов.



**Литература**

1. Irie M. Shape memory polymers / Eds. K. Otsuka, C.M. Wayman // Shape Memory Materials. – Cambridge: Cambridge University Press, 1998. – P. 203-219.
2. Trznadel M., Kryszewski M. Thermal shrinkage of oriented polymers // J.M.C. – 1992/ – 32С, N 3, 4. – P. 259-300.
3. Lendlein A., Kelch S. Shape-memory polymers // Angew. Chem. Int. Ed. – 2002. – 41, N 12. – P. 2034-2057.
4. Белошенко В.А., Варюхин В.Н., Возняк Ю.В. Эффект памяти формы в полимерах // Успехи химии, 2005, 74, № 3. – С. 285-306.
5. Белошенко В.А., Варюхин В.Н. Эффект памяти формы в полимерах и его применение. – Киев: Наукова думка, 2005. – 191 с.
6. Мовчан А.А. Микромеханический подход к проблеме описания накопления анизотропных рассеянных повреждений // Изв. РАН. Механика твердого тела, 1990, № 1. – С. 115-123.
7. Лихачев В.А., Малинин В.Г. Структурно-аналитическая теория прочности. – СПб.: Наука, 1993. – 471 с.
8. Махутов Н.А., Кивилидзе А.А. Описание механического поведения сплавов с памятью формы // Заводская лаборатория, 1995, № 6. – С. 123-128.
9. Мовчан А.А., Казарина С.А. Механика активных композитов, содержащих волокна или слои из сплава с памятью формы // Механика композиционных материалов и конструкций, 1996, т. 2, № 2. – С. 29-47.
10. Мовчан А.А. Микромеханический подход к описанию деформации мартенситных превращений в сплавах с памятью формы // Изв. РАН. Механика твердого тела, 1995, № 1. – С. 197-205.
11. Патент Украины № 10299, бюл. № 4, 1996 г.
12. Зайцев Ю.С., Кочергин Ю.С., Пактер М.К., Кучер Р.В. Эпоксидные олигомеры и клеевые композиции. – Киев: Наукова думка, 1990. – С. 200.
13. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979. – С. 774.
14. Тергулов И.Г. Изгиб и устойчивость тонких пластин и оболочек при ползучести. – М.: Наука, 1969. – С. 206.