УДК 621-192.3+69.059.4.
А.З. Манапов

РАСЧЕТ НАДЕЖНОСТИ КОНСТРУКЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УСЕЧЕННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПРОЧНОСТИ И НАПРЯЖЕНИЯ

Асимптотические распределения вероятностей имеют некоторые особенности, противоречащие физической сущности расчетных параметров, например, прочности или напряжения, которые имеют относительно неширокие пределы возможных значений. Отмеченные несовершенства асимптотических распределений могут быть устранены путем преобразования в усеченные распределения [1].

Усеченное нормальное распределение есть распределение, полученное из нормальной совокупности со средним значением m и дисперсией Δ путем перераспределения событий из области невозможных значений для данного физического параметра в область возможных значений [2].

Если область возможных значений аргумента ограничена только снизу или только сверху, имеем одностороннее усеченное распределение (рис.1), если и сверху, и снизу – двухстороннее усеченное распределение (рис.2). Если при этом выполняется условие $\dfrac{b+a}{2}=m$, имеет место симметричное усеченное распределение.

К усеченным нормальным распределениям могут быть предъявлены следующие логические требования:

1. Выполняется условие нормирования;
2. Перераспределение событий из области невозможных значений в область возможных значений осуществляется по нормальному распределению с такими же параметрами распределения m и Δ, что и у исходной совокупности. Последнее следует из теоремы о идентичности распределений генеральной совокупности и любой большой выборки из нее.
3. В точках a и b, являющихся границами между областями возможных и невозможных значений, не должно быть разрывов 1-го рода.
4. Средние значения дисперсии и исходного нормального и усеченного распределений не должны существенно отличаться.

В работе [1] автором настоящей статьи предложены схема получения и формулы усеченных нормальных распределений вероятностей, удовлетворяющие вышеперечисленным логическим требованиям и удобные для использования в расчетах надежности конструкций:

1. Симметричное усеченное нормальное распределение

$$\varphi_y(x)=0, \text{ при } x<a \text{ и } x>b;$$

$$\varphi_y(x)=\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{1-\alpha}, \text{ при } a\le x\le b; \quad (1)$$

$$\text{где } \alpha=2\int_{-\infty}^{a}\varphi(x)dx+\varphi(a)(b-a)$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{\Delta\sqrt{2p}}\exp-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\Delta}\right)^2$$ – плотность распределения исходной нормальной совокупности.

2. Несимметричное усеченное нормальное распределение

$$\begin{cases}\varphi_y(x)=0, & \text{при } x<a \text{ и } x>b;\\ \varphi_y(x)=\dfrac{\varphi(x)-\Psi(x)}{1-a}, & \text{при } a\le x\le b;\end{cases} \quad (2)$$

$$\text{где } \Psi(x)=\frac{(x-a)[\varphi(b)-\varphi(a)]}{b-a}+\varphi(a);$$

$$a=\int_{-\infty}^{a}\varphi(x)dx+\int_{b}^{\infty}\varphi(x)dx+\frac{\{\varphi(a)+\varphi(b)\}}{2}(b-a)$$

При расчетах надежности конструкций могут быть использованы и другие усеченные распределения, например, одностороннее распределение Парето

$$\begin{cases}\varphi_y(x)=0, & \text{при } x<a\ ;\\ \varphi_y(x)=\dfrac{\varphi(x)}{1-a}, & \text{при } a\le x;\end{cases} \quad (3)$$

$$\text{где } a=\int_{-\infty}^{a}\varphi(x)dx.$$

При этом следует учесть, что в распределении (3) в точке a, являющейся границей между областями возможных и невозможных значений, имеет место разрыв функции 1-го рода.

В качестве базового распределения, которое преобразовывается из асимптотического в усеченное, в формулах (1-2) могут быть использованы и другие асимптотические распределения, например, Вейбулла или Гамма распределение.

Рассмотрим особенности использования усеченных распределений вероятностей в расчетах надежности строительных конструкций.

Обозначим s - нормальное напряжение в элементе конструкции и R - удельную прочность элемента конструкции.

Примем, что s и R – случайные величины, распределенные по усеченным законам с плотностями распределения $j_y(s)$ и $j_y(R)$, имеют нижние границы возможных значений a_s и a_R и верхние границы возможных значений b_s и b_R.

Статическая оценка вероятности безотказной работы (статическая оценка надежности) конструкции Н определяется как вероятность выполнения условия R $> s$ на всем интервале возможных значений удельной прочности элемента конструкции R и напряжения s при фиксированном времени.

Выведем формулу для определения надежности Н для элемента конструкции путем последовательных рассуждений.

Вероятность того, что прочность R элемента конструкции превышает некоторое значение напряжения s, будет равна

$$P(R > s_o) = \int_s^{b_R} j_y(R)dR \tag{4}$$

Вероятность того, что прочность R превышает случайную совокупность напряжений, находящихся в интервале ds, имеющих плотность распределения $j_y(s)$, будет равна

$$j_y(s) * ds * (\int_s^{b_R} j_y(R)dR) \tag{5}$$

Надежность конструктивного элемента будет определяться как вероятность того, что вся случайная совокупность прочности R превышает всю случайную совокупность напряжений s:

$$\text{Н}=\int_{a_s}^{b_s} j_y(s)(\int_s^{b_R} j_y(R)dR)ds \tag{6}$$

Если $b_s < a_R$, значение Н, вычисленное по формуле (5), определяет надежность конструктивного элемента равным 1, так как в этом случае область возможных значений s ниже a_R и

$$\int_{\sigma_o}^{b_R} \varphi_y(R)dR = \int_{\sigma}^{a_R} \varphi_y(R) + \int_{a_R}^{b_R} \varphi_y(R) = 0 + 1 = 1$$

Можно определить надежность Н для конструктивного элемента как вероятность не превышения напряжения s прочности R.

Вероятность того, что напряжение s не превышает некоторое значение прочности R, будет равна

$$P(\sigma < R_o) = \int_{a_\sigma}^{R} \varphi_y(\sigma)d\sigma \tag{7}$$

Вероятность того, что напряжение s не превышает случайную совокупность прочности R, находящихся в интервале dR и имеющих плотность распределения $j_y(R)$, будет равна

$$j_н(R) * dR * (\int_{a_s}^{R} j_y(s)ds) \tag{8}$$

В этом случае надежность конструктивного элемента будет определяться как вероятность того, что вся случайная совокупность напряжений s не превышает всю случайную совокупность прочности R

$$\text{Н}=\int_{a_R}^{b_R} j_y(R)(\int_{a_s}^{R} j_y(s)ds)dR \tag{9}$$

Если $b_s < a_R$, значение Н, вычисленное по формуле (11), определяет надежность конструктивного элемента равным 1, так как в этом случае область возможных значений R больше b_s и

$$P(s < R_o) = \int_{a_s}^{R} j_y(s)ds = \int_{a_s}^{в_s} j_y(s)ds + \int_{в_s}^{R} j_y(s)ds = 1+0=1$$

Если удельная прочность и напряжение имеют распределение по нормальному закону распределения вероятностей, надежность конструктивного элемента можно определить из распределения случайной величины $R - s$. При отсутствии корреляционной зависимости между R и s случайная величина $R - s$ будет иметь также нормальное распределение с математическим ожиданием

$$m_{R-s} = m_{R.y} - m_{s\,y} \tag{10}$$

и стандартом

$$\Delta_{(R-s)y} = \sqrt{\Delta^2_{R.y} + \Delta^2_{s.y}} \tag{11}$$

Надежность элемента конструкции при использовании распределения $R - s$ запишется в виде

$$\text{Н}= P(R - s \geq 0) = \int_0^{b_R - a_s} j_y(R - s)dx \tag{12}$$

Таблица

Результаты расчета надежности конструктивного элемента

Функция распределения прочности и напряжения	Расчетное значение вероятности отказа
Нормальное асимптотическое распределение удельной прочности R Математическое ожидание m_R =298,0 (МПа) Стандарт распределения Δ_R =19,2 (МПа) Нормальное асимптотическое распределение напряжения s m_s =220,0(МПа) Δ_s =9,4 (МПа)	131 на 10^6 элементов (проверено)
Нормальное асимптотическое распределение удельной прочности R Математическое ожидание m_R =298,0 (МПа) Стандарт распределения Δ_R =19,2 (МПа) Нормальное асимптотическое распределение Напряжения s m_s =180,0(МПа) Δ_s =9,4 (МПа)	17 на 10^9 элементов (проверено)
Нормальное усеченное симметричное распределение удельной прочности R Математическое ожидание m_R =298,0 (МПа) Стандарт распределения Δ_R =19,2 (МПа) Нижняя граница возможных значений a_R =228,0 (МПа) Верхняя граница возможных значений b_R =368,0 (МПа) Нормальное усеченное симметричное распределение напряжений s Математическое ожидание m_s =220,0 (МПа) Стандарт распределения Δ_s =9,4 (МПа) Нижняя граница возможных значений a_s =170,0 (МПа) Верхняя граница возможных значений b_s =270,0 (МПа)	132 на 10^6 элементов
Нормальное усеченное симметричное распределение удельной прочности R Математическое ожидание m_R =298,0 (МПа) Стандарт распределения Δ_R =19,2 (МПа) Нижняя граница возможных значений a_R =228,0 (МПа) Верхняя граница возможных значений b_R =368,0 (МПа) Нормальное усеченное симметричное распределение напряжений s Математическое ожидание m_s =220,0 (МПа) Стандарт распределения Δ_s =9,4 (МПа) Нижняя граница возможных значений a_s =170,0 (МПа) Верхняя граница возможных значений b_s =270,0 (МПа) Выполнено испытание элемента конструкции, при этом максимальное напряжение в элементе имело значение 241,0 (МПа)	116 на 10^6 элементов

Усеченное нормальное распределение с математическим ожиданием $m_{R-s} = m_{R.y}$ - $m_{s\,y}$ и стандартом $\Delta_{(R-s)y} = \sqrt{\Delta^2_{R.y} + \Delta^2_{s.y}}$ будет иметь нижнюю границу распределения $a_{R-s} = a_s - b_R$ и верхнюю границу распределения $b_{R-\sigma} = b_R + b_\sigma$

Стандарты усеченных распределений удельной прочности и напряжения определяются с учетом границ возможных значений a_R, b_R, a_s, b_s

$$\Delta^2_{R.y} = \frac{\Delta_R^{\ 2}}{1-a_R}\left[1 - \int_{-\infty}^{a_R} \varphi(R)\frac{R^2}{\Delta^2_R}dR - \int_{b_R}^{\infty} \varphi(R)\frac{R^2}{\Delta_R^{\ 2}}dR - \right.$$

$$\left. - \frac{\varphi(a_R)(b_R - a_R)(b_R^{\ 2} + b_R a_R + a_R^{\ 2})}{3\Delta_R^{\ 2}}\right] \qquad (13)$$

$$\Delta^2_{s.y} = \frac{\Delta_s^{\ 2}}{1-a_s}\left[1 - \int_{-\infty}^{a_s} \varphi(s)\frac{s^2}{\Delta^2_s}ds - \int_{b_s}^{\infty} \varphi(s)\frac{s^2}{\Delta_s^{\ 2}}ds - \right.$$

$$\left. - \frac{\varphi(a_s)(b_s - a_s)(b_s^{\ 2} + b_s a_s + a_s^{\ 2})}{3\Delta_s^{\ 2}}\right] \qquad (14)$$

Рассмотрим некоторые возможности использования усеченных распределений, например, учета результатов испытаний при оценке надежности конструктивного элемента.

Результаты испытаний в одних случаях могут быть представлены как детерминированные величины, например, при пробных испытаниях известной нагрузкой, в других случаях как случайные величины, например, при испытаниях снеговыми или ветровыми нагрузками, действующими в течение нескольких сезонов.

Пусть имеет место первый случай испытания: статическое испытание конструкции с достаточно точно измеренной нагрузкой, значение которой может представляться детерминированной величиной.

При отсутствии испытания надежность конструктивного элемента определяется одной из формул (6) или (9).

Выполним корректировку формул для расчетов надежности конструктивного элемента при наличии результатов испытаний. Допустим, конструкция подверглась успешному испытанию пробной нагрузкой, при этом напряжение в расчетном конструктивном элементе было равно s_u. Если результаты испытаний оказались положительными, можно сделать вывод, что нижнее значение удельной прочности a_R не меньше s_u.

Примем $a_R = s_u$ и запишем формулу для расчета надежности конструкции с учетом испытаний.

$$H = \int_{s_u}^{b_s} j_y(s)*ds * \int_{s}^{b_s} j_y(R)dR \qquad (15)$$

$$H = \int_{s_u}^{b_s} j_y(R)*dR * \int_{s_u}^{R} j_y(s)ds \qquad (16)$$

При учете результатов испытания нижний предел возможных значений удельной прочности корректируется и сдвигается вправо (рис. 2), поэтому надежность корректируется в сторону увеличения. Если конструктивный элемент был испытан несколько раз, то в качестве s_u следует принимать максимальное значение напряжения в конструктивном элементе за все этапы испытаний.

В таблице приведены численные результаты расчета надежности двух конструктивных элементов. Первый из элементов условно можно отнести к малонадежным элементам, второй – к элементам высокой надежности.

Выводы:

1. Получены аналитические решения расчета надежности конструктивного элемента с использованием усеченных распределений вероятностей удельной прочности и напряжения.
2. Использование усеченных распределений вероятностей удельной прочности и напряжения позволяет повысить точность расчета надежности конструктивного элемента за счет отсечения физически нереализуемых значений удельной прочности и напряжения.
3. Использование усеченных распределений вероятностей удельной прочности и напряжения позволяет выполнить учет результатов испытаний при оценке надежности конструктивного элемента.

Литература

1. Манапов А.З. Усеченные нормальные распределения и их применение при решении задач надежности конструкций. Известия вузов. Строительство и архитектура, №9, 1988. – С.110-114.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М., 1970. – 542 с.