



УДК 532.5

К.В. Кириллин, С.И. Филиппов

ОБТЕКАНИЕ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА НАД ЛИНИЕЙ РАЗДЕЛА ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ КРЫШКИ И ДНА

Рассмотрим поток идеальной несжимаемой жидкости, ограниченный сверху твердой крышкой M_1 , а снизу твердым дном M_3 , и состоящий из слоя толщины H_1 плотности ρ_1 и слоя толщины H_2 плотности ρ_2 . Жидкость находится под действием силы тяжести, ускорение которой равняется g . Цилиндр C радиуса a расположен в верхнем слое жидкости на расстоянии h от верхней стенки (рис. 1). Величину h будем называть глубиной погружения, $b = H_1 - h$ – отстоянием цилиндра от линии раздела жидкостей M_2 .

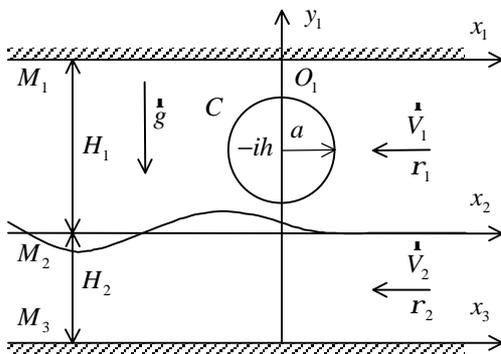


Рис. 1

В системе координат, связанной с цилиндром так, что ось O_1x_1 совпадает с горизонтальной крышкой и направлена навстречу потоку, а ось O_1y_1 направлена вверх и проходит через центр цилиндра C , течение плоскопараллельное, установившееся. Скорости потока на бесконечности перед цилиндром параллельны стенкам канала и равны V_k ($k = 1, 2$). Считаем, что внутри жидкости вихри отсутствуют, так что течение обладает потенциалом скорости.

Введем соответствующие слоям жидкости области D_k ($k = 1, 2$). Область D_1 представляет собой полосу $-H_1 \leq y_1 \leq 0$, за исключением области, ограниченной контуром C , область D_2 – полосу

$$-(H_1 + H_2) \leq y_1 \leq -H_1.$$

Рассмотрим комплексную переменную $z_1 = x_1 + iy_1$ и комплексные потенциалы возмущенного течения $W_k(z_1) = \varphi_k(x_1, y_1) + i\psi_k(x_1, y_1)$ в соответствующих областях D_k .

Используя предположения линейной теории волн малой амплитуды, с учетом обозначений

$$W_k(z_1) = V_k W_k(z_1), \quad v_1 = \frac{g}{V_1^2}, \quad v_2 = \frac{g(r_1 - r_2)}{r_1 V_1^2 + r_2 V_2^2},$$

$$m_1 = \frac{r_1 V_1^2}{r_1 V_1^2 + r_2 V_2^2}, \quad m_2 = \frac{r_2 V_2^2}{r_1 V_1^2 + r_2 V_2^2}, \quad m = m_1 - m_2$$

придем к следующей задаче. Найти функции $W_k(z_1)$, аналитические в соответствующих областях и удовлетворяющие условиям:

на поверхности цилиндра C

$$\text{Im } W_1(z_1) = y_1 + y_0 \quad (y_0 = \text{const}), \quad z_1 \in C; \quad (1)$$

на горизонтальной крышке M_1

$$\text{Im} \left[\frac{dW_1(z_1)}{dz_1} \right] = 0, \quad y_1 = 0; \quad (2)$$

на линии раздела жидкостей M_2

$$\text{Im} [W_1(z_1) - W_2(z_1)] = 0, \quad (3)$$

$$\text{Re} \left[m_1 \frac{dW_1(z_1)}{dz_1} - m_2 \frac{dW_2(z_1)}{dz_1} + iv_2 W_1(z_1) \right] = 0,$$

$$y_1 = -H_1; \quad (4)$$

на дне канала M_3

$$\text{Im} \left[\frac{dW_2(z_1)}{dz_1} \right] = 0, \quad y_1 = -(H_1 + H_2); \quad (5)$$

на бесконечности

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty} \frac{dW_k(z_1)}{dz_1} = 0, \quad \left| \frac{dW_k(z_1)}{dz_1} \right| < A, \quad A < \infty, \quad z_1 \rightarrow \infty. \quad (6)$$



Граничные условия (1), (2), (5) являются условиями плавности обтекания цилиндра и стенок канала. Условие (3) на линии раздела является кинематическим условием, (4) - динамическим и представляет собой комплексную запись условия непрерывности давления при пересечении поверхности раздела жидкостей, взятое в линеаризованной форме. При этом, следуя теории волн малой амплитуды, будем выполнять это условие на невозмущенном уровне линии раздела. Условия на бесконечности (6) обеспечивают отсутствие скоростей возмущений далеко перед цилиндром и ограниченность возмущений вне его окрестности.

Метод решения заключается в распределении двойных слоев особенностей (диполей) вещественной плотности по невозмущенному уровню линии раздела жидкостей M_2 и горизонтальной крышке M_1 и дну M_3 , к потенциалам которых добавляются такие регулярные вне цилиндра функции, что условие на цилиндре (1) выполняется точно. Такой метод был впервые предложен в [1] и развит для многосвязных областей в [2].

Рассмотрим бесциркуляционное обтекание цилиндра C . Будем искать комплексные потенциалы в виде

$$W_k(z_1) = W_\infty(z_1) + V_1(z_1) + \Phi_1(z_1) + V_2(z_1) + \Phi_2(z_1) + V_3(z_1) + \Phi_3(z_1), \quad (7)$$

где

$$W_\infty(z_1) = -\frac{a^2}{z_1 + ih},$$

$$V_1(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m_1(t)}{z_1 - t} dt,$$

$$\Phi_1(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(z_1, t) m_1(t) dt,$$

$$F_1(z_1, t) = \frac{a^2}{(t - ih)^2 \left[z_1 + ih - \frac{a^2}{t - ih} \right]},$$

$$V_2(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m_2(t)}{z_1 - t + iH_1} dt,$$

$$\Phi_2(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(z_1, t) m_2(t) dt,$$

$$F_2(z_1, t) = \frac{a^2}{(t - ih + iH_1)^2 \left[z_1 + ih - \frac{a^2}{t - ih + iH_1} \right]},$$

$$V_3(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m_3(t)}{z_1 - t + i(H_1 + H_2)} dt,$$

$$\Phi_3(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} F_3(z_1, t) m_3(t) dt,$$

$$F_3(z_1, t) = \frac{a^2}{(t - ih + i(H_1 + H_2))^2 \left[z_1 + ih - \frac{a^2}{t - ih + i(H_1 + H_2)} \right]}.$$

Здесь $W_\infty(z_1)$ - комплексный потенциал возмущенного течения при обтекании цилиндра C безграничным потоком; $m_1(t)$, $m_2(t)$, $m_3(t)$ - вещественные плотности диполей, непрерывно распределенных по линиям $y_1 = 0$, $y_1 = -H_1$, $y_1 = -(H_1 + H_2)$ (под $m_2(t)$ и $m_3(t)$ подразумевается $m_2(t - iH_1)$ и $m_3(t - i(H_1 + H_2))$ соответственно). Функции $\Phi_1(z_1)$, $\Phi_2(z_1)$, $\Phi_3(z_1)$ построены с использованием теоремы Милн-Томсона об окружности [3] так, чтобы мнимая часть их суммы соответственно с $V_1(z_1)$, $V_2(z_1)$, $V_3(z_1)$ на цилиндре C являлась постоянной [1], что обеспечивает выполнение граничного условия на цилиндре (1), если комплексный потенциал записан в виде (7).

Для определения плотностей $m_l(t)$ ($l = \overline{1, 3}$) воспользуемся условиями (2), (4), (5). Условие (3) выполняется на основании свойств предельных значений интеграла типа Коши. Рассмотрим подробно граничное условие (4) на линии раздела жидкостей, куда перенесем ось абсцисс, т.е. проведем преобразование координат $z_2 = z_1 + iH_1$.

Подставим комплексный потенциал в форме (7) в условие (4) с учетом преобразования координат, получим:

$$\operatorname{Re} \left[\left(\frac{d}{dz_2} + i n_2 \right) V_2(z_2) + \left(m \frac{d}{dz_2} + i n_2 \right) \left(\Omega_2(z_2) + V_3(z_2) \right) \right]_{z_2 = x_2 + i0} = 0, \quad (8)$$

где

$$\Omega_2(z_2) = W_\infty(z_2) + V_1(z_2) + \Phi_1(z_2) + \Phi_2(z_2) + \Phi_3(z_2),$$

и $V_2(z_2)$ - предельное значение при подходе к оси O_2x_2 сверху.

Условие (8) представляет собой сингулярное интегро-дифференциальное уравнение, которое содержит три группы слагаемых: с особенностями на линии раздела ($y_2 = 0$), с особенностями внутри рассматриваемой области ($y_2 > 0$) и с особенностями



вне области ($y_2 < 0$). Его можно регуляризовать, используя следующий прием. Заметим, что (8) эквивалентно следующему уравнению:

$$\operatorname{Re} \left[\left(\frac{d}{dz_2} + \dot{m}_2 \right) V_2(z_2) + \left(m \frac{d}{dz_2} - \dot{m}_2 \right) \bar{\Omega}_2(z_2) + \left(m \frac{d}{dz_2} + \dot{m}_2 \right) V_3(z_2) \right]_{z_2=x_2+i0} = 0,$$

где черта сверху означает сопряжение относительно оси O_2x_2 . Функции $V_2(z_2)$, $V_3(z_2)$, $\bar{\Omega}_2(z_2)$ регулярны в верхней полуплоскости в системе координат $x_2O_2y_2$, следовательно, выражение под знаком действительной части в этой области является чисто мнимой постоянной:

$$\left(\frac{d}{dz_2} + \dot{m}_2 \right) V_2(z_2) + \left(m \frac{d}{dz_2} - \dot{m}_2 \right) \bar{\Omega}_2(z_2) + \left(m \frac{d}{dz_2} + \dot{m}_2 \right) V_3(z_2) = \dot{m}_2 N, \quad (9)$$

где N - вещественная постоянная. Из условия на бесконечности (6), не нарушая общности решения, можем положить $N = 0$. Соотношение (9) представляет собой линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно V_2 , решив которое, найдем

$$V_2(z_2) = -m \left[\bar{\Omega}_2(z_2) + V_3(z_2) \right] + \dot{m}_2 e^{-\dot{m}_2 z_2} \int_{+\infty}^{z_2} e^{\dot{m}_2 t} \left[(m+1) \bar{\Omega}_2(t) + (m-1) V_3(t) \right] dt.$$

Устремив z_2 сверху к оси O_2x_2 , на основании формулы Сохоцкого получим

$$m_2(x_2) - \frac{1}{pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m_2(t)}{x_2 - t} dt = 2m \left[\bar{W}_\infty(x_2) + \bar{V}_1(x_2) + \bar{O}_1(x_2) + \bar{O}_2(x_2) + \bar{O}_3(x_2) + V_3(x_2) \right] - 2\dot{m}_2 e^{-\dot{m}_2 x_2} \int_{+\infty}^{x_2} e^{\dot{m}_2 t} \left[(m+1) (\bar{W}_\infty(t) + \bar{V}_1(t) + \right.$$

$$\left. + \bar{\Phi}_1(t) + \bar{\Phi}_2(t) + \bar{\Phi}_3(t) \right) + (m-1) V_3(t) \Big] dt. \quad (10)$$

Перемена порядка интегрирования позволяет представить действительные части выражения (10) в виде линейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Остальные два уравнения для нахождения плотностей особенностей можно получить, проделав аналогичные (8) - (10) преобразования для граничных условий (2) и (5) на стенках канала. В результате получим систему уравнений для определения плотностей:

$$\begin{cases} m_1(x_1) = j_1(x_1) + \int_{-\infty}^{+\infty} K_{11}(x_1, t) m_1(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} K_{12}(x_1, t) m_2(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} K_{13}(x_1, t) m_3(t) dt, \\ m_2(x_2) = j_2(x_2) + \int_{-\infty}^{+\infty} K_{21}(x_2, t) m_1(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} K_{22}(x_2, t) m_2(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} K_{23}(x_2, t) m_3(t) dt, \\ m_3(x_3) = j_3(x_3) + \int_{-\infty}^{+\infty} K_{31}(x_3, t) m_1(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} K_{32}(x_3, t) m_2(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} K_{33}(x_3, t) m_3(t) dt, \end{cases} \quad (11)$$

где

$$j_1(x_1) = -2a^2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{x_1 + ih} \right\}, \quad K_{11}(x_1, t) = \frac{1}{p} \operatorname{Im} \{ F_1(x_1, t) \},$$

$$K_{12}(x_1, t) = \frac{1}{p} \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{x_1 - t + iH_1} + F_2(x_1, t) \right\},$$

$$K_{13}(x_1, t) = \frac{1}{p} \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{x_1 - t + i(H_1 + H_2)} + F_3(x_1, t) \right\},$$

$$j_2(x_2) = -2a^2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{m}{x_2 - i(H_1 - h)} + (m+1) \dot{m}_2 e^{\dot{m}_2 x_2} \int_{+\infty}^{x_2} \frac{e^{-\dot{m}_2 t}}{t - i(H_1 - h)} dt \right\},$$

$$K_{21}(x_2, t) = \frac{1}{p} \operatorname{Im} \left\{ \frac{m}{x_2 - t - iH_1} + (m+1) \dot{m}_2 e^{\dot{m}_2 x_2} \int_{+\infty}^{x_2} \frac{e^{-\dot{m}_2 t}}{t - t - iH_1} dt + \right.$$

$$\left. + mF_1(x_2, t) + (m+1) \dot{m}_2 e^{\dot{m}_2 x_2} \int_{+\infty}^{x_2} e^{-\dot{m}_2 t} F_1(t, t) dt \right\},$$

$$K_{22}(x_2, t) = \frac{1}{p} \operatorname{Im} \left\{ mF_2(x_2, t) + \right.$$



$$\begin{aligned}
 & + (m+1)iv_2 e^{in_2 x_2} \int_{+\infty}^{x_2} e^{-in_2 t} F_2(t, t) dt \left. \right\}, \\
 & K_{23}(x_2, t) = \frac{1}{p} \operatorname{Im} \left\{ \frac{m}{x_2 - t + iH_2} - \right. \\
 & \left. - (m-1)in_2 e^{in_2 x_2} \int_{+\infty}^{x_2} \frac{e^{-in_2 t}}{t - t - iH_2} dt + \right. \\
 & \left. + mF_3(x_2, t) + (m+1)in_2 e^{in_2 x_2} \int_{+\infty}^{x_2} e^{-in_2 t} F_3(t, t) dt \right\}, \\
 & j_3(x_3) = 2a^2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{x_3 - i(H_1 + H_2 - h)} \right\}, \\
 & K_{31}(x_3, t) = -\frac{1}{p} \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{x_3 - t - i(H_1 + H_2)} + F_1(x_3, t) \right\}, \\
 & K_{32}(x_3, t) = -\frac{1}{p} \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{x_3 - t - iH_2} + F_2(x_3, t) \right\}, \\
 & K_{33}(x_3, t) = -\frac{1}{p} \operatorname{Im} \{ F_3(x_3, t) \}.
 \end{aligned}$$

Полученная система линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода (11) для определения \mathbf{m}_l может быть решена численно методом последовательных приближений [2]. В качестве нулевого приближения могут быть выбраны свободные члены системы \mathbf{j}_l .

По найденным значениям плотностей можем определить комплексный потенциал возмущенного течения (7) и по формуле Чаплыгина [4] вычислить подъемную силу и волновое сопротивление цилиндра C :

$$X - iY = \frac{ir_1}{2} \oint_C \left[\frac{dW_1^*(z_1)}{dz_1} \right]^2 dz_1.$$

Результаты расчетов гидродинамических характеристик для различной геометрии канала представлены на рис. 2 – 5. На графиках изображены зависимости коэффициента волнового сопротивления $c_x = 2X/r_1 V_1^2 a$ и коэффициента подъемной силы $c_y = 2Y/r_1 V_1^2 a$ в зависимости от числа Фруда $Fr = V_1/\sqrt{ga}$ для случая одинаковых скоростей слоев ($V_1 = V_2$). Во всех расчетах отношение плотностей жидкостей $r_2/r_1 = 1.03$, что соответствует отношению

плотностей морской и пресной воды, и рассмотрен цилиндр единичного радиуса.

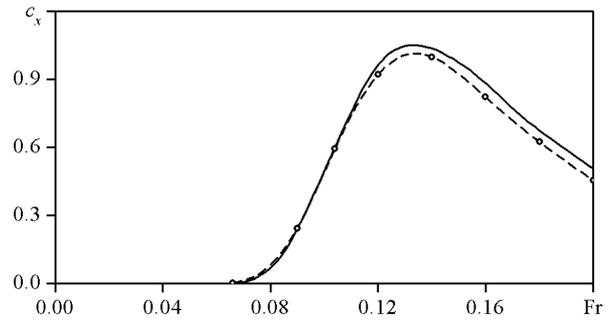


Рис. 2

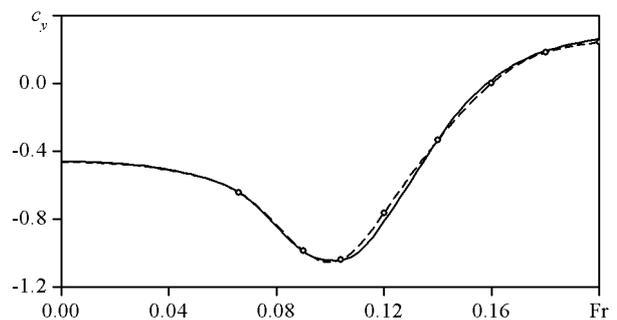


Рис. 3

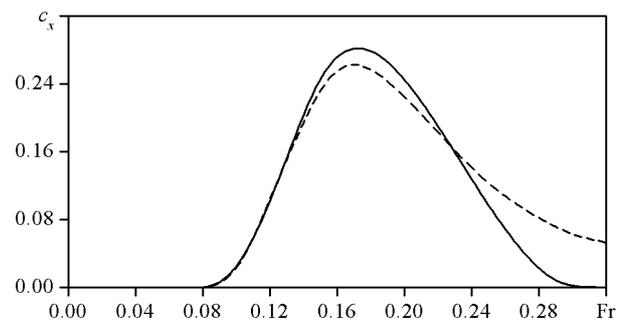


Рис. 4

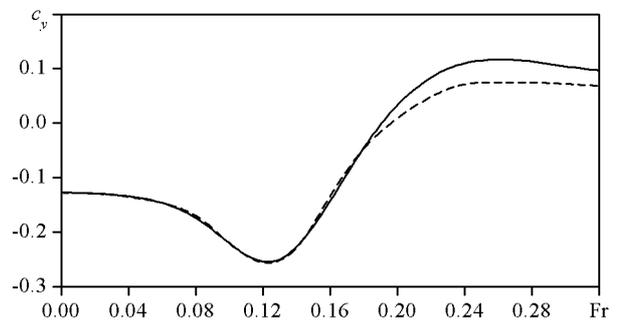


Рис. 5



Для данной задачи характерно наличие критического числа Фруда Fr^* , значение которого зависит от r_2/r_1 , H_1/a , H_2/a [5]. Периодические волны на линии раздела существуют только при $Fr < Fr^*$, поэтому именно в этом диапазоне изменения числа Фруда проводились расчеты.

На рис. 2-3 при $b/a = 2$ сплошной кривой изображены гидродинамические характеристики для цилиндра, расположенного над линией раздела, в случае канала, ограниченного крышкой и дном $H_1/a = H_2/a = 8$, а штриховой - в случае двух полубезграничных слоев жидкости $H_1 = H_2 = \infty$. Полученные результаты для неограниченного потока согласуются с результатами работы [6], которые отмечены маркерами.

На рис. 4-5 представлены результаты исследования влияния дна при отсутствии крышки ($H_1 = \infty$) на характеристики цилиндра при $b/a = 3$. Сплошной кривой изображены зависимости $c_x(Fr)$ и $c_y(Fr)$ при конечной глубине нижнего слоя $H_2/a = 4$, штриховой - при бесконечной глубине $H_2 = \infty$. Влияние дна начинает сказываться на гидродинамических характеристиках при числах Фруда $Fr > 0.14$. Максимум c_x больше в случае слоя конечной глубины.

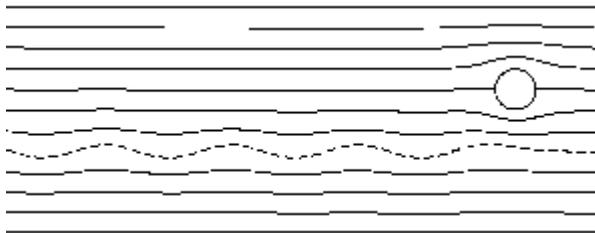


Рис. 6

На рис. 6 представлен пример расчета линий тока течения и границы раздела жидкостей при $h/a = 4$, $H_1/a = 7$, $H_2/a = 4$, $Fr = 0.12$.

Работа поддержана РФФИ (проект 05-01-00794).

Литература

1. Тумашев Г.Г., Черепенин Н.Д. Задача о движении круглого цилиндра под свободной поверхностью тяжелой жидкости // Труды семинара по краевым задачам, вып. 10. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1973. – С. 140-151.
2. Филиппов С.И. Гидродинамика крылового профиля вблизи границ раздела. – Казань: Изд-во Казанского матем. общ-ва, 2004. – 200 с.
3. Милн-Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика. – М.: Мир, 1964. – 656 с.
4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1970. – 904 с.
5. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. – М.: Наука, 1977. – 816 с.
6. Черепенин Н.Д. К задаче о движении круглого цилиндра вблизи границы раздела двух жидкостей. // Труды семинара по теории оболочек, вып. 4. – Казань: Казанский физ.-тех. ин-т АН СССР, 1974. – С. 252-262.