



УДК 624.23

А.У. Богданович

## МЕТОД СТРУКТУРНО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ОСЛАБЛЕНИЙ ПРИ РАСЧЁТАХ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Для стержней постоянного сечения, *центрально сжимаемых* за пределом пропорциональности материала, хорошее согласование с экспериментами даёт методика расчёта по касательному модулю – см., например, [1]. Учёт *эксцентриситетов* нагружения делает задачу трудноразрешимой в аналитическом виде даже для стержней постоянного сечения. Небольшой обзор соответствующих классических упрощённых методов расчёта содержится в [2]. Там же изложено на русском языке решение Ежека (K. Ježek). Решение Хвалла (E. Chwalla) приводится в [1]. Сложность задачи привела к тому, что, например, в современных Строительных Нормах рекомендуется производить расчёт на устойчивость как расчёт фактически на прочность с коэффициентом снижения допускаемого напряжения. Этот метод почти целиком основан на данных экспериментов и на теоретических расчётах Е. Хвалла, К. Ежека и В.В. Пинаджяна [3]. В расчётах упомянутых авторов используются упрощающие предположения: считается, что изогнутая ось стержня - полуволна синусоиды, а деформирование его материала следует идеализированной диаграмме Прандтля или аналогичной диаграмме с упрочнением.

В данной публикации предлагается сравнительно простой метод численного определения критической нагрузки для внецентренно сжимаемых упруго-пластических стержней. Метод был разработан для решения задач устойчивости тонкостенных стержней переменного сечения, но здесь мы демонстрируем его на задачах, относящихся к стержням постоянного сечения. Основная идея метода состоит в том, что важнейшие признаки перехода сжатого стержня в неустойчивое состояние можно выяснить, анализируя решения классического уравнения Эйлера для линейно-упругого стержня. Затем эти условия накладываются на напряжённо-деформированное состояние (НДС) реального стержня.

Далее мы рассматриваем стержни, материал которых можно считать упруго-пластическим. Соответствующая диаграмма растяжения-сжатия широко применяется при расчётах конструкций, изготовленных из материалов типа мягкой (малоуглеродистой) стали. К ним, например, относятся строительные стали марок от С235 до С590. Считается, что диаграмма растяжения-сжатия таких материалов симметрична относительно начала координат, имеет хорошо выраженный участок линейного деформирования и достаточно протяжённую площадку текучести.

Рассмотрим шарнирно опёртый на обоих торцах *линейно-упругий* стержень постоянного прямоугольного сечения.

*Примечание.* Расчёты производились при размерах прямоугольного сечения  $2 \times 1$  см;  $L = 30$  см;  $E = 2,1 \cdot 10^6$  кгс/см<sup>2</sup>;  $s_T = 2400$  кгс/см<sup>2</sup>;  $s_{пл} = 2000$  кгс/см<sup>2</sup>.

Стержень нагружается внецентренно, с односторонним нормативным эксцентриситетом

$$e_y = \frac{i_{\min}}{20} + \frac{L}{750}, \quad (1)$$

и уравнение его деформирования можно представить в виде

$$EJ_x(z) \cdot v'' + p \cdot v(z) + z \cdot C_3 + C_4 = 0 \quad (2)$$

при граничных условиях

$$v(0) = v(L) = 0; \quad EJ_x \cdot v''(0) = EJ_x \cdot v''(L) = p \cdot e_y. \quad (3)$$

При решении методом конечных разностей уравнение (2) записывается не только во внутренних точках сетки, но и в торцевых точках. При дискретизации системы уравнений (2)-(3) математическое условие потери устойчивости  $\det = 0$  не зависит от правой части системы уравнений (2)-(3), но от правой части зависит, при какой нагрузке в реальном стержне возникнут нелинейно-упругие или пластические деформации от изгиба и сжатия.

Посмотрим, как меняется критическое напряжение при искусственном уменьшении изгибной жёсткости

$EJ_x$  центрального сечения. Для удобства вычислений в процессе решения задачи меняем не весь комплекс

$EJ_x$ , а лишь значение  $J_x$ . При этом будем помнить, что причиной снижения изгибной жёсткости может также служить снижение модуля упругости.

График изменения критического напряжения при уменьшении изгибной жёсткости *центрального сечения* - по решению системы (2)-(3) - показан на рис. 1

(начальный момент инерции -  $J_x^0$ , для ослабленного

сечения -  $\tilde{J}_x$ ). Критическое значение торцевого сжимающего напряжения для неослабленного стержня

составляет  $s_{кр}^{(1)} = 1919$  кгс/см<sup>2</sup>.

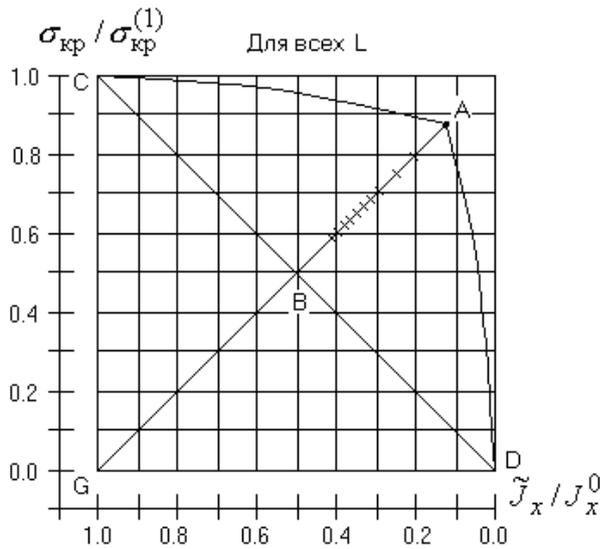


Рис. 1. Структурная характеристика устойчивости стержня

То же значение даёт формула Эйлера:

$$P_{кр} = \left(\frac{P}{1 \cdot L}\right)^2 \cdot E \cdot J_x; S_{кр} = P_{кр} / F = 1919 \text{ кгс/см}^2;$$

эти критические нагрузки не зависят от правой части уравнения (2) и от правой части граничных условий (3).

Напряжения  $S_z$ , равные пределу текучести, при весьма малых эксцентриситетах (1) - по решению уравнения (2) и по формулам сжатия с изгибом - появляются в центральном сечении стержня при напряжениях на торцах

$$S_z^{(2)} = 1196 \text{ кгс/см}^2. \quad (4)$$

При подсчёте (4) используются соотношения

$$S_z = \frac{P}{F} \cdot m \cdot \frac{M_x}{w_x}; M_x = -P \cdot v(z) - C_1 \cdot z - C_2;$$

выражение для  $M_x$  следует непосредственно из уравнения (2).

Первые напряжения, превышающие предел пропорциональности материала, появляются в центральном сечении стержня при напряжениях на торцах

$$S_z^{(3)} = 1079 \text{ кгс/см}^2.$$

*Примечание.* Для стержня с жёстко заделанными торцами напряжения, превышающие  $S_T$  или  $S_{ПЦ}$ , могут появляться в окрестностях торцов. При одних и тех же гибкостях упруго-пластических стержней критические нагрузки для случая шарнирного опирания и для случая двух жёстких заделок могут не совпадать.

Точку А на графике определим как точку, в которой

тангенс угла наклона касательной к графику равен единице. Точка А на рис.1 разделяет пологую левую часть графика и круто ниспадающую правую часть. В левой части критическая нагрузка слабо зависит от параметра ослабления сечения, в правой же части очень небольшие дополнительные ослабления жёсткости приводят к резкому снижению устойчивости стержня.

График рис.1 обладает большой общностью. Его значения и конфигурация не зависят от длины или гибкости стержня; не зависят они ни от формы сечения, ни от эксцентриситетов нагружения, ни от величины предела текучести материала. График лишь демонстрирует процесс снижения устойчивости стержня при последовательных ослаблениях жёсткости центрального сечения, независимо от причины этих ослаблений.

На стержне длины  $L$  введём в рассмотрение зону длиной  $l_*$ , все сечения которой имеют одинаковый (средний) показатель ослабления  $\tilde{J} / J_0$ .

Засечками на графике рис.1 отмечено положение точки А при увеличении длины  $l_*$  ослабленной центральной зоны стержня, начиная от нуля, с шагом  $0,02 \cdot L$ . Прямая  $CD$  - тот же график  $CAD$  в предельном случае, когда зона ослабления охватывает стержень по всей длине. Важный момент: при увеличении длины  $l_*$  ослабленной зоны показатель ослабления сечений на прямой  $AB$  стремится к предельному значению 0.5 ( $\tilde{J} / J_0 \rightarrow 0.5$ ). При длине  $l_* = 0$  всегда  $\tilde{J} / J_0 = 0,1275$ . При значении  $\tilde{J} / J_0 = 0,4$  длина ослабленной центральной зоны всё ещё невелика:  $l_* = L/5$  (рис.2).

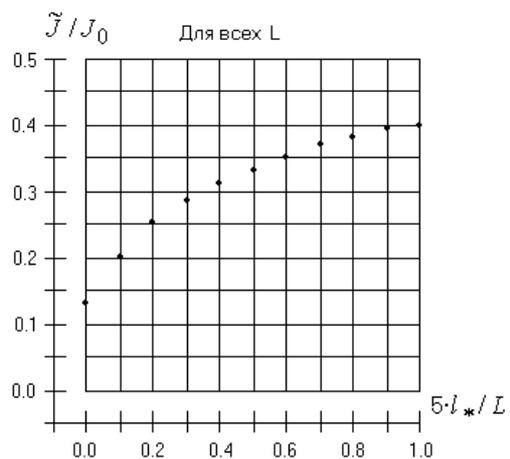


Рис. 2. Зависимость параметра критического ослабления зоны от её длины

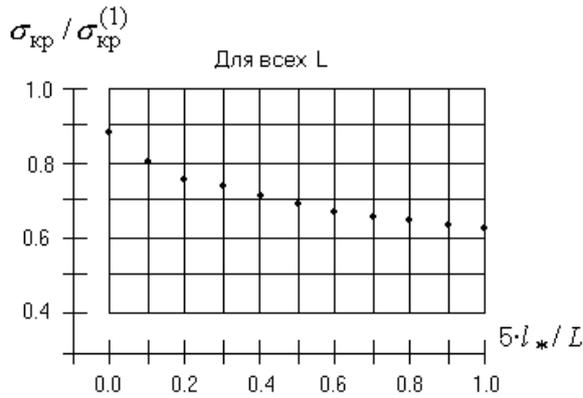


Рис. 3. Зависимость критического напряжения от длины ослабленной зоны

На рис. 3 показан график зависимости критического напряжения от длины ослабленной зоны  $l_*$ . График на рис. 3 обладает той же степенью общности, что и графики на рис. 1, 2: его значения и конфигурация не зависят от длины или гибкости стержня; не зависят они ни от формы сечения, ни от эксцентриситетов нагружения, ни от величины предела текучести материала.

При возрастании параметра  $l_*$  критические напряжения убывают. При значениях  $l_* > L/5$  критические напряжения слабо зависят от длины ослабленной зоны; далее для приближённых расчётов можно принять значение  $l_* \approx L/5$ . Надо также иметь в виду, что система наших гипотез, допущений и усреднений тем точнее, чем меньше длина ослабленной зоны.

Теперь мы обладаем достаточно большой информацией о критических состояниях шарнирно опёртых стержней, имеющих центральную зону с пониженной изгибной жёсткостью. Подводя итоги, выделим два основных момента.

Первое. Наименьшим критическим значениям нагрузки соответствует интервал длин ослабленной зоны  $L/5 \leq l_* \leq L$ , причём для приближённых расчётов можно брать наименьшее значение из этого интервала -  $l_* = L/5$ .

Второе. Наименьшим критическим значениям нагрузки соответствует средний параметр ослабления зоны  $\tilde{J} / J_0 = 0.5$ , который мы также будем далее использовать при решении задачи методом ослаблений.

Эти выводы справедливы для стержней постоянного сечения любой гибкости (форма сечения также любая), независимо от значений предела пропорциональности и предела текучести материала;

причина ослабления зон здесь не имеет значения. Выводы не зависят от величин эксцентриситетов, с которыми нагружается стержень.

Имея в своём распоряжении указанные признаки критического состояния стержня, мы можем предсказать уровень нагрузки, при котором это состояние достигается, определяя соответствующее НДС стержня с небольшой погрешностью по уравнениям для линейно-упругого стержня.

Пусть в ослабленной зоне момент инерции сечений составляет в среднем  $\tilde{J} = 0,5 \cdot J_0$ , и при чистом изгибе (с погрешностью в запас устойчивости) пластические зоны занимают области сечения  $y \geq y_*$  и  $y \leq -y_*$ . Тогда для упругой области прямоугольного сечения момент инерции есть

$$\frac{b \cdot (2y_*)^3}{12} = 0,5 \cdot \frac{b \cdot h^3}{12},$$

откуда  $y_* = 0,39685 \cdot h$ . При  $y_* = 0,39685 \cdot h$  сравнение изгибающих моментов в чисто упругом сечении без ослаблений и в сечении с пластическими областями показывает, что для прямоугольного сечения во втором случае изгибающий момент лишь на 6% меньше, чем в первом. С такой же погрешностью определяется НДС стержня в данном сечении при решении задачи по уравнениям линейной задачи.

Процесс решения задачи ещё более упрощается, если учесть, что краевая задача в случае линейно-

упругого материала при постоянной жёсткости  $EJ_x^0$  имеет аналитическое решение. Действительно, для сечений любого вида уравнение четвёртого порядка

$$EJ_x^0 \cdot v^{IV}(z) + P \cdot v''(z) = 0$$

с граничными условиями

$$v(0) = v(L) = 0; M_x(0) = M_x(L) = P \cdot e_y$$

имеет решением функцию

$$v(z) = -e_y \cdot \left[ \operatorname{tg}\left(\frac{aL}{2}\right) \cdot \sin(az) + \cos(az) - 1 \right]. \quad (5)$$

Подставляя в (5) координату одного из краёв ослабленной центральной зоны  $z = \mathbf{II} z_*$  при  $l_* = L/5$ , подсчитываем изгибающий момент в этом сечении:

$$M_x(z_*) = P \cdot \left[ \left| e_y \right| + \left| v(z_*) \right| \right].$$

Далее, как показано выше, определяем расчётную координату  $y_*$  в данном сечении. Постепенно



увеличивая в расчётах силу  $P$ , подсчитываем на уровнях  $\pm y_*$  в данном сечении напряжение  $S_z$ , пока не выполнится условие

$$|S_z| = \left| \frac{P}{F} + \frac{M_x \cdot y_*}{J_x^0} \right| = S_T.$$

Подсчитанная таким образом нагрузка и будет критической для данного стержня.

На рис.4 приведены графики-решения задачи для стержня постоянного прямоугольного сечения с физическими параметрами, приведёнными выше. Эксцентриситет нагружения - нормативный, односторонний (1).

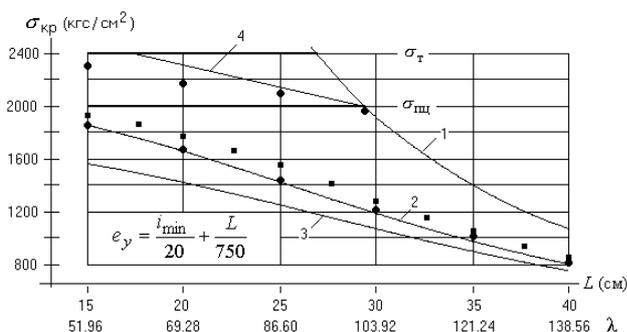


Рис. 4. 1 - по Эйлеру; 2 - первые пластические деформации; 3 - первые деформации за пределом пропорциональности; 4 - прямая Тетмайера-Ясинского; ● - по теории Хвалла; ■ - наша теория

Кривая-1 – гипербола Эйлера для центрально сжатого линейно-упругого стержня. Кривая-2 соответствует появлению напряжений  $|S_z| = S_T$  в центральном сечении. Кривая-3 соответствует появлению в центральном сечении напряжений  $|S_z| = S_{пц}$ . Линия-4 – прямая Тетмайера-Ясинского, аппроксимирующая результаты экспериментов Тетмайера на центрально сжатых стержнях прямоугольного сечения.

Верхний ряд чёрных кружков – теоретические решения Е. Хвалла для центрально сжатых стержней прямоугольного сечения по данным [1]; результаты Хвалла лежат ниже экспериментальной прямой-4, что характерно и для расчётов внецентренно сжатых стержней. Нижний ряд чёрных кружков – решения Хвалла для внецентренно сжатых стержней, аппроксимированные по данным монографии [1]. Решения Хвалла были получены им для реальной диаграммы материала с пределом текучести

$S_T = 2400 \text{ кгс/см}^2$  и пределом пропорциональности

$S_{пц} \approx 1900 \text{ кгс/см}^2$ .

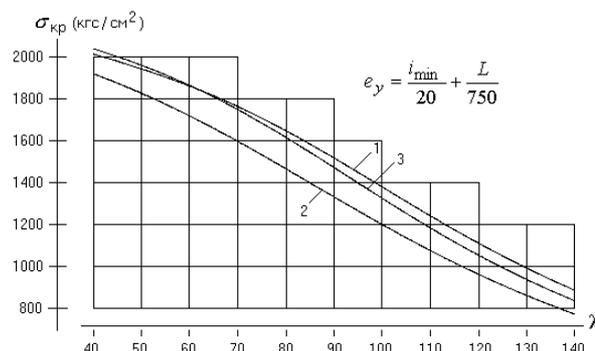


Рис. 5. Критические напряжения для стержня круглого сечения

На рис.5 приведены результаты расчётов на устойчивость стержней сплошного круглого сечения радиуса  $R = 1 \text{ см}$ . Остальные числовые данные – те же, что и для стержней прямоугольного сечения. Кривая-2 соответствует появлению в центральном сечении напряжений  $|S_z| = S_T$ . Наибольшее отклонение кривой-3 (наша теория) от кривой-1 (решение по К. Ежеку [2]) составляет по вертикали 5,64% при  $L = 140$ .

Результаты экспериментов на стержнях прямоугольного и крестообразного сечений, приведённые в [3], сравнивались с решениями по нашей теории. Во всех случаях критические нагрузки, подсчитанные методом структурно-пластических ослаблений, оказались достаточно близкими к значениям в экспериментах ( $\pm 7\%$ ). Отметим в заключение, что метод структурно-пластических ослаблений при расчёте стержней постоянного сечения весьма прост и в этом смысле выгодно отличается от классических методик расчёта.

### Литература

1. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твёрдого тела. – М.: Наука, 1979. – 744 с.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
3. Пинаджян В.В. Прочность и деформации сжатых стержней металлических конструкций. Изд. АН Арм. ССР. – Ереван, 1971. – 223 с.