



УДК: 69.04

DOI: 10.48612/NewsKSUAE/67.14

EDN: VEBYDG



Определение нормальных напряжений в металлических стержневых конструкциях при произвольном сочетании усилий и кручении с учетом пластических деформаций при циклическом нагружении

П.В. Еремеев^{1,2}, Г.Н. Шмелев¹

¹Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г. Казань, Российская Федерация

²АО Спецремпроект, г. Казань, Российская Федерация

Аннотация. Работа тонкостенных металлических конструкций открытого профиля, распространенных в строительной практике, характеризуется значительным влиянием депланации сечения на несущую способность, что обуславливает актуальность исследований по определению напряженно-деформированного состояния сечений при изгибе и стесненном кручении с учетом пластических деформаций. Цель исследования заключалась в разработке численной математической модели на основе метода переменных параметров упругости, позволяющей с достаточной точностью определять нормальные напряжения сечений стержневых металлических конструкций с учетом пластических деформаций при стесненном кручении и циклическом нагружении. Задачами исследования являются: разработка численной математической модели на основе метода переменных параметров упругости; реализация математической модели в виде программы; верификация разработанной программы. В статье представлена математическая модель, позволяющая определить нормальные напряжения в стержневых металлических конструкциях при стесненном кручении с учетом развития пластических деформаций. Модель реализована в виде программы на языке программирования Python и верифицирована в упругой и пластической стадиях работы с аналитическим и численным (метод конечных элементов) решениями. Отклонения максимальных напряжений в сечении по методу переменных параметров упругости от аналитического и численного решений в упругой стадии составили не более 5%, что говорит о применимости рассматриваемого метода к решению задач совместного действия усилий изгибающего момента и бимоментов в упругой стадии работы. Распределение напряжений по сечению при пластических деформациях и последующей разгрузке по методу переменных параметров упругости в достаточной степени соответствует результатам метода конечных элементов, что свидетельствует о применимости предложенной модели для решения задач в упругопластической стадии при циклическом нагружении. Полученные результаты могут быть использованы для уточнения расчетов при проектировании металлических конструкций, испытывающих совместное действие изгибающего момента и кручения.

Ключевые слова: стесненное кручение, метод переменных параметров упругости, упругопластические деформации

Для цитирования: Еремеев П.В., Шмелев Г.Н. Определение нормальных напряжений в металлических стержневых конструкциях при произвольном сочетании усилий и кручении с учетом пластических деформаций при циклическом нагружении // Известия КГАСУ, 2024, № 1(67), с. 135-145, DOI: 10.48612/NewsKSUAE/67.14, EDN: VEBYDG

Determination of normal stresses in metal rod structures under an arbitrary combination of forces and torsion, taking into account plastic deformations under cyclic loading

P.V. Eremeev^{1,2}, G.N. Shmelev¹

¹Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, Russian Federation

²JSC Spetsremproekt, Kazan, Russian Federation

Abstract. The work of thin-walled metal structures of an open profile, common in construction practice, is characterized by a significant effect of section deplaning on the bearing capacity, which determines the relevance of research to determine the stress-strain state of sections during bending and constrained torsion, taking into account plastic deformations. The purpose of the study was to develop a numerical mathematical model based on the method of variable elasticity parameters, which allows sufficiently accurate determination of the normal stresses of the cross sections of rod metal structures, taking into account plastic deformations under constrained torsion and cyclic loading. The objectives of the research are: development of a numerical mathematical model based on the method of variable elasticity parameters; implementation of a mathematical model in the form of a program; verification of the developed program. The article presents a mathematical model that allows us to determine the normal stresses in rod metal structures under constrained torsion, taking into account the development of plastic deformations. The model is implemented as a program in the Python programming language and verified in the elastic and plastic stages of working with analytical and numerical (finite element method) solutions. Deviations of the maximum stresses in the cross section according to the method of variable elasticity parameters from analytical and numerical solutions in the elastic stage amounted to no more than 5%, which indicates the applicability of the method under consideration to solving problems of the combined action of bending moment and bimoment forces in the elastic stage of work. The stress distribution over the cross section during plastic deformations and subsequent unloading using the method of variable elasticity parameters is sufficiently consistent with the results of the finite element method, which indicates the applicability of the proposed model to solve problems in the elastoplastic stage under cyclic loading. The results obtained can be used to refine calculations in the design of metal structures experiencing the combined action of bending moment and torsion.

Keywords: Constrained torsion, method of variable elastic parameters, elastoplastic deformations

For citation: Eremeev P.V., Shmelev G.N. Determination of normal stresses in metal rod structures under an arbitrary combination of forces and torsion, taking into account plastic deformations under cyclic loading // News KSUAE, 2024, № 1(67), p. 135-145, DOI: 10.48612/NewsKSUAE/67.14, EDN: VEBYDG

1. Введение

Работа тонкостенных металлических конструкций при стесненном кручении характеризуется депланацией сечения. Стесненное кручение, в той или иной степени, возникает в большинстве стержневых металлических конструкций, из-за случайных эксцентриситетов приложения нагрузок, сопряжения конструктивных элементов и т.п., что приводит к несовпадению направления нагрузки с центром изгиба. Для обеспечения надежного и экономичного проектирования необходимы достаточно точные и простые в применении методы расчета.

Экспериментально установлено [1], что упругопластическому состоянию конструкции при кручении соответствуют значительно большие предельные усилия, чем упругому. Это обуславливает необходимость соответствующих исследований по определению напряженно-деформированного состояния (НДС).

Решение задачи определения НДС металлических стержневых конструкций при произвольном сочетании усилий и кручении в упругой постановке предложено В.З.

Власовым. Напряжения от каждой компоненты усилий складываются для определения итогового НДС на основе принципа суперпозиции, а напряжения от стесненного кручения определяются по закону распределения секториальных площадей. При пластическом деформировании принцип суперпозиции при определении НДС не действителен, что требует применения численных методов расчета.

В исследовании [2] показано, что при упругопластическом деформировании за предельное состояние двутаврового сечения можно принять достижение шарнира пластичности в полках. В статье [3] предложен практический метод определения несущей способности двутавровых балок в пластической стадии при одновременном действии крутящего и изгибающего момента, проведены экспериментальные исследования по определению возможности его применения. В работе [4] предложен расчет тонкостенных стержней по деформированной схеме. В статьях [5, 6] экспериментально и численно рассмотрена работа балки, воспринимающей кручение. Полученные теоретические данные по методу конечных элементов имеют хорошую сходимость с экспериментальными результатами. Авторами статьи [7] разработан алгоритм корректировки бимоента, позволяющий избежать нарушение баланса бимоментов в соединениях рамных систем. Влияние жесткости узловых соединений на устойчивость и прочность тонкостенных конструкций с учетом бимоента рассмотрено в [8]. Смешанный метод конечных элементов в вариационной постановке на основе теории полусдвигных тонкостенных стержней Сливкера представлен в статье [9]. В статьях [10, 11] рассмотрено поведение тонкостенных участков стержня при ограниченном кручении. Исследованию кручения стержней методом конечных граничных элементов посвящены работы [12-14]. Влияние соединений на работу холодногнутых профилей при кручении рассмотрено в статье [15]. Современные исследования также посвящены решению задачи кручения для неоднородных стержней [16, 17], потери устойчивости наноразмерных стержней при действии продольной силы и кручения [18], задач динамики [19]. Закритическое поведение сжатых стержней с нелинейно упругими опорами рассмотрено в [20].

Цель исследования заключается в разработке численной математической модели на основе метода переменных параметров упругости (МППУ), позволяющей с достаточной точностью определять нормальные напряжения сечений стержневых металлических конструкций с учетом пластических деформаций при стесненном кручении.

Задачами исследования являются:

1. формулирование положений математической модели на основе метода переменных параметров упругости;
2. реализация математической модели в виде программы;
3. верификация разработанной программы.

2. Материалы и методы

2.1 Описание модели

Ранее авторами была рассмотрена нелинейная деформационная модель сечения, позволяющая определять нормальные напряжения при произвольном знакопеременном упругопластическом нагружении конструкции с учетом остаточных напряжений [21]. Дополним ее с целью учета стесненного кручения.

Проведем триангуляцию рассматриваемого сечения с фиксацией принадлежности элементарных площадок к пластинам сечения.

Уравнения равновесия в сечении записываются на приращения усилий, причем в пределах каждого приращения соотношение напряжений и деформаций по диаграмме работы материала должно быть однозначно определено:

$$\Delta M_x = \sum_i \sigma_i \cdot A_i \cdot Z_{xi}, \quad (1)$$

$$\Delta M_y = \sum_i \sigma_i \cdot A_i \cdot Z_{yi}, \quad (2)$$

$$\Delta N = \sum_i \sigma_i \cdot A_i, \quad (3)$$

где ΔM_x , ΔM_y , ΔN приращения соответственно усилий изгибающего момента относительно оси x , изгибающего момента относительно оси y и продольной силы;

σ_i – приращение напряжений в i -й элементарной площадке;

A_i – площадь i -й элементарной площадки;

Z_{xi} – расстояние от i -й элементарной площадки до принятой оси x ;

Z_{yi} – расстояние от i -й элементарной площадки до принятой оси y .

Уравнение, определяющее распределение деформаций по сечению элемента, дополняется деформацией треугольника с предыдущей стадии нагружения:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^H + \varepsilon_0 + \frac{1}{r_x} \cdot Z_{xi} + \frac{1}{r_y} \cdot Z_{yi} + \varepsilon_0^k + \frac{1}{r_x^k} \cdot Z_{xi} + \frac{1}{r_y^k} \cdot Z_{yi}, \quad (4)$$

где ε_i^H – деформация i -й элементарной площадки с предыдущей стадии нагружения;

ε_i – деформация i -й элементарной площадки;

$\frac{1}{r_x}, \frac{1}{r_y}, \varepsilon_0$ – кривизны и относительная деформация по нейтральной оси сечения;

$\frac{1}{r_x^k}, \frac{1}{r_y^k}, \varepsilon_0^k$ – кривизны и относительная деформация по нейтральной оси сечения,

вызываемые бимоментом;

Z_{xi}, Z_{yi} – расстояния от i -й элементарной площадки до осей x и y соответственно.

Общие уравнения, связывающее напряжения и относительные деформации, и уравнения, определяющие коэффициенты жесткости, принимаются по СП 63.13330.2018 «Бетонные и железобетонные конструкции»:

$$\sigma_i = E \cdot \nu_i \cdot \varepsilon_i, \quad (5)$$

$$D_{11} = \sum_i A_i \cdot Z_{xi}^2 \cdot E \cdot \nu_i \quad (6)$$

$$D_{13} = \sum_i A_i \cdot Z_{xi} \cdot E \cdot \nu_i, \quad (7)$$

$$D_{22} = \sum_i A_i \cdot Z_{yi}^2 \cdot E \cdot \nu_i, \quad (8)$$

$$D_{12} = \sum_i A_i \cdot Z_{xi} \cdot Z_{yi} \cdot E \cdot \nu_i, \quad (9)$$

$$D_{23} = \sum_i A_i \cdot Z_{yi} \cdot E \cdot \nu_i, \quad (10)$$

$$D_{33} = \sum_i A_i \cdot E \cdot \nu_i, \quad (11)$$

где D_{ij} – коэффициенты жесткости;

ν_i – коэффициент, корректирующий модуль упругости на каждой итерации расчета.

Дополнительные изгибающие моменты от продольной силы и усилия по напряжениям определяются в приращениях:

$$\Delta M_x = \Delta M_{xd} + \Delta N \cdot e_x, \quad (12)$$

$$\Delta M_y = \Delta M_{yd} + \Delta N \cdot e_y, \quad (13)$$

$$\Delta M_x = D_{11} \Delta \frac{1}{r_x} + D_{12} \Delta \frac{1}{r_y} + D_{13} \Delta \varepsilon_0, \quad (14)$$

$$\Delta M_y = D_{12} \Delta \frac{1}{r_x} + D_{22} \Delta \frac{1}{r_y} + D_{23} \Delta \varepsilon_0, \quad (15)$$

$$\Delta N = D_{13} \Delta \frac{1}{r_x} + D_{23} \Delta \frac{1}{r_y} + D_{33} \Delta \varepsilon_0. \quad (16)$$

Для учета бимоента, дополнительно в рамках одной итерации необходимо выполнить следующие вычисления для каждой пластинки сечения, испытывающей воздействие биоента

$$D_{11}^k = \sum_i A_{k,i} \cdot Z_{k,xi}^2 \cdot E \cdot \nu_{k,i}, \quad (17)$$

$$D_{13}^k = \sum_{i=k} A_{k,i} \cdot Z_{k,xi} \cdot E \cdot \nu_{k,i}, \quad (18)$$

$$D_{22}^k = \sum_{i=k} A_{k,i} \cdot Z_{k,yi}^2 \cdot E \cdot \nu_{k,i}, \quad (19)$$

$$D_{12}^k = \sum_{i=k} A_{k,i} \cdot Z_{k,xi} \cdot Z_{k,yi} \cdot E \cdot \nu_{k,i}, \quad (20)$$

$$D_{23}^k = \sum_{i=k} A_{k,i} \cdot Z_{k,yi} \cdot E \cdot \nu_{k,i}, \quad (21)$$

$$D_{33}^k = \sum_{i=k} A_{k,i} \cdot E \cdot \nu_{k,i}, \quad (22)$$

$$\Delta M_{\omega,x}^k = D_{11}^k \Delta \frac{1}{r_x^k} + D_{12}^k \Delta \frac{1}{r_y^k} + D_{13}^k \Delta \varepsilon_0^k, \quad (23)$$

$$\Delta M_{\omega,y}^k = D_{12}^k \Delta \frac{1}{r_x^k} + D_{22}^k \Delta \frac{1}{r_y^k} + D_{23}^k \varepsilon_0^k, \quad (24)$$

$$\Delta N_{\omega}^k = D_{13}^k \Delta \frac{1}{r_x^k} + D_{23}^k \Delta \frac{1}{r_y^k} + D_{33}^k \varepsilon_0^k. \quad (25)$$

где ΔM_{ω} – приращение изгибающего момента в k -й пластинке, вызываемого бимоментом;

D_{ij}^k – коэффициенты жесткости k -й пластинки на восприятие бимомента:

$\Delta M_{\omega,x}^k, \Delta M_{\omega,y}^k, \Delta N_{\omega}^k$ – приращения усилий в k -й пластинке, вызываемые бимоментом и определяемые по закону распределения секториальных площадей.

Коэффициенты ν_i определяются по формуле:

$$\nu_i = \frac{\sigma_i^H - \sigma_i}{\varepsilon_i^H - \varepsilon_i} * \frac{1}{E}. \quad (26)$$

2.2 Верификация модели

Описанная выше модель в полном объеме реализована в виде программы на языке программирования Python. Сравним результаты расчета по разработанной программе с аналитическими и численными (метод конечных элементов) решениями в упругой и упругопластической постановках.

Модель материала при упругопластическом анализе принята по диаграмме Прандтля.

Рассмотрим двутавровое сечение, воспринимающее усилия изгибающего момента в плоскости наибольшей жесткости и стесненного кручения. Аналитическое решение этой задачи в упругой области деформирования имеется в книге «Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций» Бычкова Д.В. Размеры сечения: полки 220 x 20 мм, стенка 700 x 10 мм. Сечение воспринимает изгибающий момент $M_x = 324 \text{ кН} \cdot \text{м}$, крутящий момент $M_x = 2.868 \text{ кН} \cdot \text{м}$ и бимомент $B_{\omega} = 8.048 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$.

По теории В.З. Власова суммарные напряжения в крайней фибре сечения составляют:

$$\sigma = \sigma_x + \sigma_{\omega} = 85,63 + 70,64 = 156,27 \text{ МПа}. \quad (27)$$

Смоделируем эту задачу методом конечных элементов в программном комплексе Midas Civil. Геометрические параметры и нагрузки соответствуют исходным данным, представленным выше. Расчет выполнен в упругой постановке, геометрическая нелинейность не учитывалась. Эпюра нормальных напряжений в сечении заделки представлена на рис. 1 в).

Результаты расчетов занесены в таблицу.

Рассмотрим решение этой задачи в разработанной программе на основе описанной модели. Размер элементарного участка при триангуляции принят не более 5 мм. На рис. 2 представлены результаты расчета – распределение напряжений по сечению.

Для двутаврового сечения усилия от стесненного кручения по теории В.З. Власова в стенке нулевые, а в полках:

$$\Delta M_{\omega,x}^k = 0, \quad (28)$$

$$\Delta M_{\omega,y}^k = \frac{B_w}{h} = \frac{8.048 \text{ кН} \cdot \text{м}^2}{0.72 \text{ м}} = 11.18 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad (29)$$

$$\Delta N_{\omega}^k = 0, \quad (30)$$

где h – расстояние между полками двутавра;

B_w – бимомент в сечении;

В упругопластической стадии выполнено сравнение результатов расчета по представленной модели с МКЭ. Рассмотрено 3 варианта предела текучести: 120, 94 и 87 МПа. Результаты расчетов представлены в графическом виде на рис. 3.

На рис. 4 представлены остаточные напряжения, полученные при разгрузке варианта с пределом текучести 87 МПа по МППУ и МКЭ.

На рис. 5 а) показана кривая изгибающий момент - кривизна при разгрузке сечения.

На рис. 5 б) показана кривая изгибающий момент - кривизна при нагружении 10 полных циклов в диапазоне изгибающего момента от -306.18 кН*м до 306.18 кН*м и изгибающего момента полки от стесненного кручения от -10.565 кН*м до 10.565 кН*м.

3. Результаты

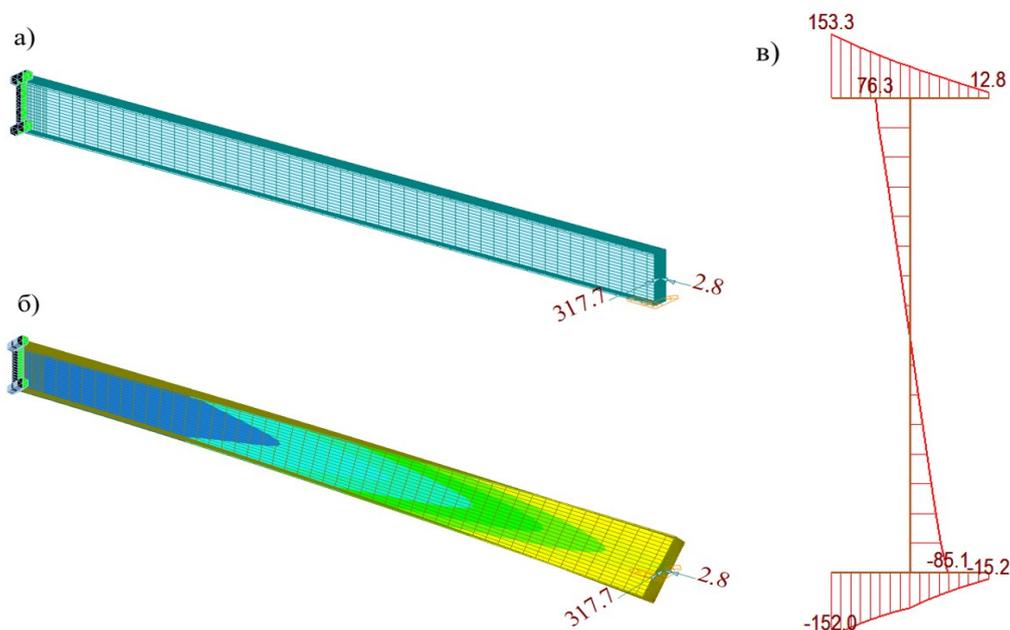


Рис. 1. Результаты расчета по МКЭ. а) Расчетная модель, б) деформированный вид расчетной модели, в) эпюры напряжений в сечении у заделки (иллюстрация авторов)

Fig. 1. Calculation results for FEM. a) Calculation model, b) deformed view of the calculation model, c) stress diagrams in the section at the sealing (illustration by the authors)

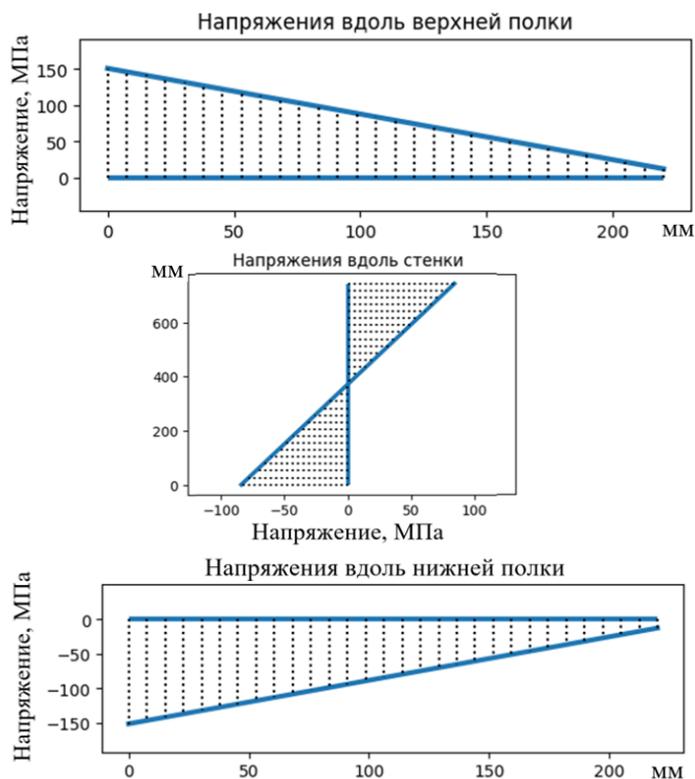


Рис. 2. Результаты расчета по МППУ (иллюстрация авторов)
 Fig. 2. The results of the calculation according to the MPPU (illustration by the authors)

Таблица

Результаты расчетов в упругой стадии

| | МППУ | Аналитическое решение | МКЭ | Отклонение МППУ от аналитического решения, % | Отклонение МППУ от МКЭ, % |
|---------------------------------|--------|-----------------------|-------|--|---------------------------|
| Напряжения в крайней фибре, МПа | 150,86 | 156,27 | 153,3 | 3,46 | 1,59 |

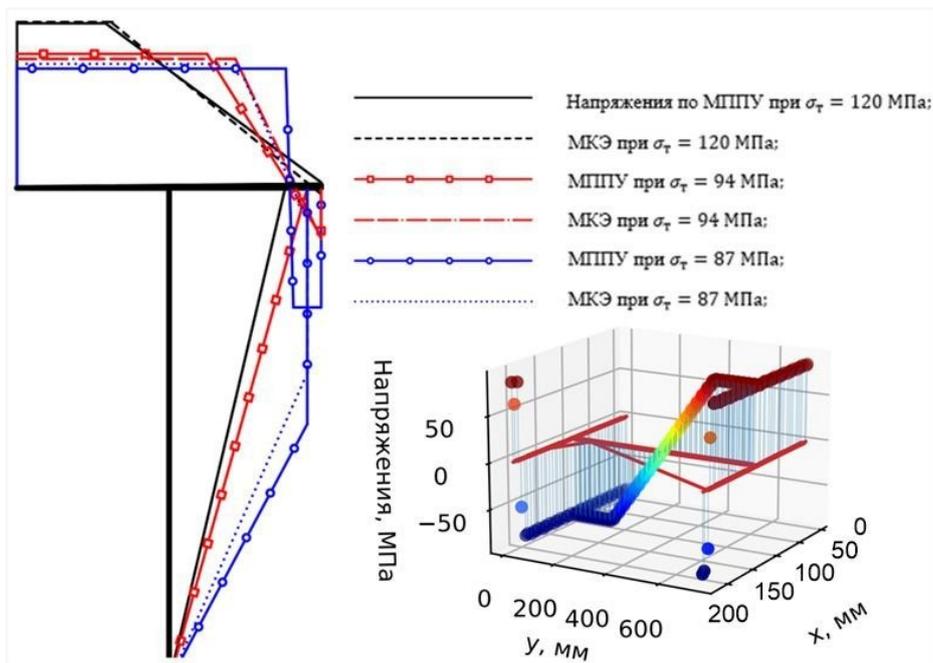


Рис. 3. Результаты расчетов в упруго-пластической стадии (иллюстрация авторов)
 Fig. 3. Calculation results in the elastic-plastic stage (illustration by the authors)

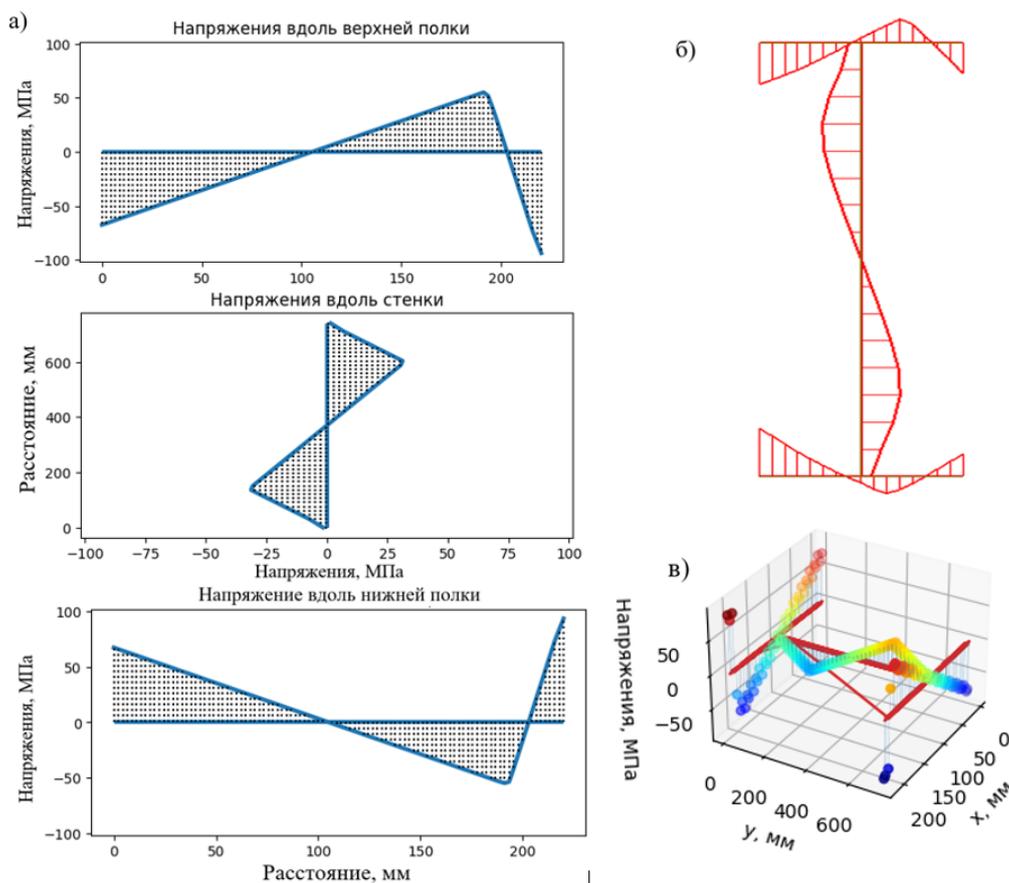


Рис. 4. Результаты расчетов при разгрузке. а) эпюры напряжений по МППУ, б) эпюры напряжений по МКЭ, в) объемное распределение напряжений по МППУ (иллюстрация авторов)
 Fig. 4. The results of calculations during unloading. a) stress diagrams according to MPPU, b) stress diagrams according to FEM, c) volumetric stress distribution according to MPPU (illustration by the authors)

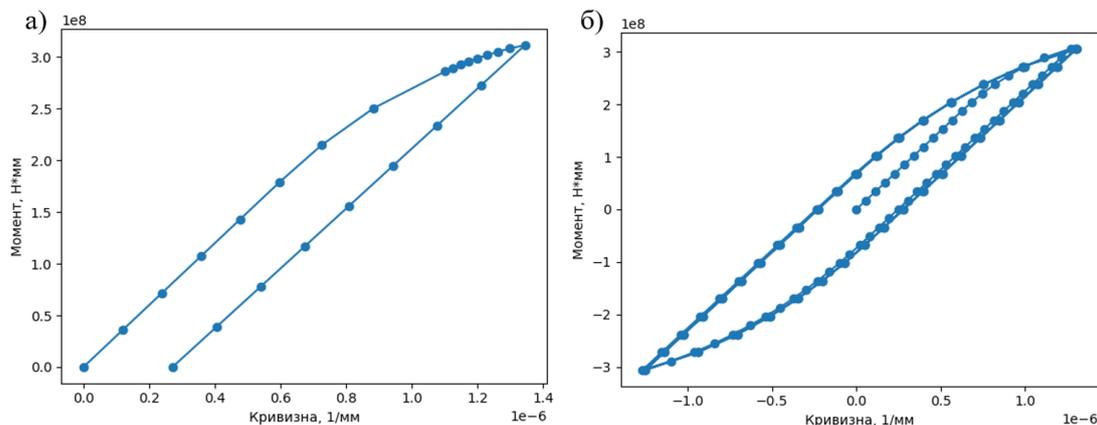


Рис. 5. Кривые нагружения по МППУ а) при разгрузке, б) при циклическом нагружении (иллюстрация авторов)
 Fig. 5. Loading curves according to the MPPU a) during unloading, b) during cyclic loading (illustration by the authors)

4. Обсуждение

Отклонения максимальных напряжений в сечении по МППУ от аналитического и численного решений составили не более 5%, что говорит о применимости рассматриваемого метода к решению задач совместного действия усилий изгибающего момента и бимоента в упругой стадии работы. Полученные отклонения не выше отклонений в экспериментальных исследованиях других авторов [5, 6].

Как видно из рис. 3 распределение напряжений по сечению по МППУ в достаточной степени соответствует результатам МКЭ, что свидетельствует о применимости предложенной модели для решения задач в упругопластической стадии. Некоторое отклонение связано с тем, что по МКЭ работа материала в пластической стадии принимается по эквивалентным напряжениям, что приводит к тому, что нормальные напряжения несколько превышают предел упругости (эквивалентные напряжения при этом равны пределу упругости). За исключением этого фактора площади эпюр нормальных напряжений по МППУ и МКЭ совпадают.

На рис. 4 представлено сравнение остаточных напряжений, полученных при разгрузке по МППУ и МКЭ. Форма эпюр по двум методам совпадает, что свидетельствует о применимости рассматриваемого метода при решении задач циклического нагружения.

Модель позволяет помимо рассмотренных случаев получить распределение нормальных напряжений при их произвольном начальном распределении (остаточные напряжения) и стадийном нагружении (разгрузении). Результаты такого расчета могут быть применены при оценке малоциклового прочностии (задачи приспособляемости), многоциклового прочностии (задачи выносливости) и местной устойчивости.

5. Заключение

1. Математическая модель на основе дополненного метода переменных параметров упругости позволяет в стадийной постановке с учетом остаточных напряжений и пластических деформаций определять напряженно деформированное состояние стержневых металлических конструкций при произвольном сочетании усилий изгибающих моментов, продольной силы и бимоментов.
2. Представленная модель реализована в виде программы на языке Python с целью ее верификации на аналитических и численных (МКЭ) решениях.
3. Полученные результаты показали хорошую сходимость и свидетельствуют о применимости рассматриваемого метода.

Полученные результаты могут иметь практическое применение в строительной практике при выполнении упругопластических расчетов металлических конструкций.

В дальнейшем авторы намерены рассмотреть влияние остаточных напряжений по различным моделям на несущую способность металлических стержней при восприятии изгибающего момента и стесненного кручения.

Список литературы

1. Boulton, N.S. Plastic twisting and bending of an I-section in which warp is restricted // N.S. Boulton // Int. J. Mech. Sci. - 1962. - Vol. 4. - P. 491-502.
2. Pi Y.L., Trahair N.S. Inelastic torsion of steel I-beams // Research Report No. R679. The University of Sydney. 1993
3. Туснин А.М., Прокич М. Работа симметричных двутавровых сечений при развитии пластических деформаций и действии изгибающего момента и бимоментов // Инженерно-строительный журнал. 2014. № 5(49). С. 44-53. DOI: 10.5862/MCE.49.5. [Tusnin A.M., Prokich M. The work of symmetrical I-sections in the development of plastic deformations and the action of bending moment and bimoment // Construction and engineering journal. 2014. No 5(49). P. 44-53. DOI: 10.5862/MCE.49.5.]
4. Белый, Г.И. Расчет упругопластических тонкостенных стержней по пространственно-деформируемой схеме // Межвуз. темат. сб. тр. (Строительная механика сооружений). - 1983. - № 42. - С. 40-48. [Bely, G.I. Calculation of elastic-plastic thin-walled rods according to a spatially deformable scheme // Inter-university theatrical collection of works (Construction mechanics of structures). - 1983. - No. 42. - P. 40-48.]
5. Gebre T. H., Galishnikova V. V., Lebed E. V. Experimental and numerical investigation of thin-walled I-section beam under bending and torsion // Structural Mechanics of

- Engineering Constructions and Buildings. – 2022. – Vol. 18, No. 4. – P. 341-350. – DOI 10.22363/1815-5235-2022-18-4-341-350. – EDN MDQQNP.
6. Gebre T., Galishnikova V., Lebed E., Tupikova E. Modelling of thin-walled members with restrained torsion considering the section properties // Magazine of Civil Engineering. – 2023. – No. 2(118). – P. 11806. – DOI 10.34910/MCE.118.6. – EDN LLEBKS.
 7. Serpik, I., Shkolyarenko R. Algorithm of correcting bimoments in calculations of thin-walled bar systems // Magazine of Civil Engineering. – 2021. – No. 7(107). – P. 10706. – DOI 10.34910/MCE.107.6. – EDN SIRSTV.
 8. Atavin I. V., Melnikov B. E., Semenov A. S. Influence of stiffness of node on stability and strength of thin-walled structure // Magazine of Civil Engineering. – 2018. – No. 4(80). – P. 48-61. – DOI 10.18720/MCE.80.5. – EDN UYQGNA.
 9. Lalin V. V., Rybakov V. A., Ivanov S. S., Azarov A. A. Mixed finite-element method in V.I. Slivker's semi-shear thin-walled bar theory // Magazine of Civil Engineering. – 2019. – No. 5(89). – P. 79-93. – DOI 10.18720/MCE.89.7. – EDN YUKBRU.
 10. Galishnikova, V. The behaviour of thin-walled beam with restrained torsion / V. Galishnikova, T. H. Gebre // Magazine of Civil Engineering. – 2022. – No. 2(110). – P. 11009. – DOI 10.34910/MCE.110.9. – EDN DHUYLB.
 11. Galishnikova, V. V., Gebre T. H. Finite Element Analysis for Thin-Walled Member Subjected to Combined Loading // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2022. – Vol. 18, No. 3. – P. 65-77. – DOI 10.22337/2587-9618-2022-18-3-65-77. – EDN SXRWQV.
 12. Lalin, V. V., Semenov D. A. Torsion problem: stress statement and solution by the boundary element method // Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings. – 2023. – Vol. 19, No. 4. – P. 339-348. – DOI 10.22363/1815-5235-2023-19-4-339-348. – EDN WXVNUL.
 13. Dumont N.A. Complex-variable, high-precision formulation of the consistent boundary element method for 2D potential and elasticity problems. Engineering Analysis with Boundary Elements. 2023;152:552–574. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2023.04.024>
 14. Dumont N.A. The consistent boundary element method for potential and elasticity: Part I – Formulation and convergence theorem. Engineering Analysis with Boundary Elements. 2023;149:127–142. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2023.01.017>
 15. Selyantsev, I. M., Tusnin A. Cold-formed steel joints with partial warping restraint // Magazine of Civil Engineering. – 2021. – No. 1(101). – P. 10101. – DOI 10.34910/MCE.101.1. – EDN CHLVKH.
 16. Chen H., Gomez J., Pindera M.J. Saint Venant's torsion of homogeneous and composite bars by the finite volume method. Composite Structures. 2020;242:112–128. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112128>
 17. Chen K.H., Kao J.H., Chen J.T., Liao J.F. A new error estimation technique for solving torsion bar problem with inclusion by using BEM. Engineering Analysis with Boundary Elements. 2020;115:168–211. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2020.02.012>
 18. Ma X., Kiani K. Spatially nonlocal instability modeling of torsionally loaded nanobeams. Engineering Analysis with Boundary Elements. 2023;154:29–46. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2023.05.012>
 19. Labaki J., A Barros P.L., Mesquita E. A model of the time-harmonic torsional response of piled plates using an IBEM-FEM coupling. Engineering Analysis with Boundary Elements. 2021;125:241–249. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2021.01.010>
 20. Каюмов, Р. А. Закритическое поведение сжатых стержней с нелинейно упругими опорами // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2022. – № 3. – С. 23-31. – DOI 10.15593/perm.mech/2022.3.03. – EDN OERASD. [Kayumov, R. A. Supercritical behavior of compressed rods with non-linearly elastic supports // Bulletin of the Perm National Research Polytechnic University. Mechanics. – 2022. – No. 3. – P. 23-31. – DOI 10.15593/perm.mech/2022.3.03. – EDN OERASD.]

21. Еремеев, П. В., Шмелев Г. Н. Применение метода переменных параметров упругости при решении задач знакопеременного упруго-пластического нагружения металлических конструкций с учетом остаточных напряжений // Строительная механика и расчет сооружений. – 2023. – № 6(311). – С. 2-10. – DOI 10.37538/0039-2383.2023.6.2.10. – EDN MIPPXU. [Eremeev, P. V. Application of the method of variable elasticity parameters in solving problems of alternating elastic-plastic loading of metal structures taking into account residual stresses / P. V. Eremeev, G. N. Shmelev // Construction mechanics and calculation of structures. – 2023. – № 6(311). – P. 2-10. – DOI 10.37538/0039-2383.2023.6.2.10. – EDN MIPPXU.]

Информация об авторах

Павел Валерьевич Еремеев, аспирант, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г. Казань, Российская Федерация

E-mail: pavil-66@inbox.ru

Геннадий Николаевич Шмелев, кандидат технических наук, доцент, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г. Казань, Российская Федерация

E-mail: gn.shmelev@mail.com

Information about the authors

Pavel V. Eremeev, post-graduate student, Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, Russia

E-mail: pavil-66@inbox.ru

Genadij N. Shmelev, candidate of technical sciences, associate professor, Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, Russia

E-mail: gn.shmelev@mail.ru