УДК 537.525
Сафиуллин Р.К. – доктор физико-математических наук, профессор
Тел: (843) 510-47-46
Казанский государственный архитектурно-строительный университет

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ ТЕПЛОВЫХ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТЛЕЮЩЕГО РАЗРЯДА В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТРУБКАХ В ПОТОКЕ ГАЗА

АННОТАЦИЯ

Тлеющий разряд (ТР) в газах давно применяется для обработки различных материалов. В последние десятилетия это связано также с разработкой и совершенствованием мощных газоразрядных CO_2-лазеров, которые все более широко используются для обработки изделий и материалов [1].

Данная работа посвящена аналитическим исследованиям положительного столба (ПС) ТР в разрядных камерах (РК) цилиндрической формы с продольным потоком газа.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: тлеющий разряд, поток газа, концентрация электронов, напряженность электрического поля, температура газа.

Safiullin R.K. – doctor of physical-mathematical sciences, professor
Kazan State University of Architecture and Engineering

ANALYTICAL INVESTIGATION OF THERMAL AND ELECTRIC CHARACTERISTICS OF GLOW DISCHARGE IN GAS FLOW CYLINDRICAL TUBES

ABSTRACT

Glow discharge in gases is applied for processing different materials and manufactures for a long time. In last few decades the appliance of glow discharge was stipulated by the development and perfecting of powerful CO_2 lasers [1]. The paper is devoted to analytical investigation of thermal and electric characteristics of the positive column of glow discharge in gas flow cylindrical tubes.
KEYWORDS: glow discharge, gas flow, electron density, electric field strength, gas temperature.

Целью исследования в данной работе является рассмотрение свойств положительного столба (ПС) ТР в потоке газа на основе простой модели плазмы, состоящей из нейтрального газа, электронов и положительных ионов. Каждая компонента такой смеси представляется как отдельная среда, сосуществующая с другими компонентами и описываемая системой уравнений сохранения с учетом взаимодействия между компонентами (гидродинамическое приближение). Такой подход возможен в случае, когда средние длины свободного пробега электронов, атомов, молекул и ионов (частиц компонентов плазмы) намного меньше характерного пространственного масштаба макроскопических изменений и время между столкновениями частиц намного меньше характерного временного масштаба макроскопических изменений [2].

Аналитическое описание свойств ТР в потоке газа невозможно без ряда упрощающих предположений. В данной работе принимается, что: 1) степень ионизации газа в ПС ~ 10^{-8}-10^{-6}, и поэтому можно пренебречь столкновениями заряженных частиц между собой в отличие от столкновений заряженных частиц с нейтральными (в этих условиях теплопроводность, теплоемкость и плотность газа определяются в основном нейтральными частицами); 2) плазма ПС квазинейтральна, ионизация газа происходит электронным ударом с основного уровня нейтральной частицы; 3) пренебрегается слабой зависимостью коэффициента амбиполярной диффузии D_{ea} от электрического поля, т.е. D_{ea} считается постоянным [3].

В длинных разрядных трубках при скоростях прокачки газа u ~ 10-100 м/с можно пренебречь диффузией электронов вдоль оси РК по сравнению с диффузией в радиальном направлении и с конвективным переносом. С учетом данных приближений уравнение неразрывности для электронной компоненты плазмы в осесимметричной цилиндрической РК записывается в виде:

$$\frac{u}{R}\frac{\partial n_e}{\partial z}+\frac{v}{R}\frac{\partial n_e}{\partial r}=\frac{D_{ea}}{R^2 r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial n_e}{\partial r}\right)+n_i n_e . \qquad (1)$$

Здесь u, v, n_e – продольная и поперечная компоненты скорости газа и концентрация электронов, R – радиус разрядной трубки, D_{ea} – коэффициент амбиполярной диффузии, n_i – частота ионизации газа, r и z – радиальная и продольная координаты, отнесенные к радиусу трубки.

В уравнении (1) частота ионизации сильно зависит от напряженности электрического поля. Здесь она аппроксимируется выражением:

$$n_i = aE^m , \qquad (2)$$

где $m > 0$ (обычно полагают $m = 2$).

В ТР основная доля вкладываемой в разряд электрической энергии передается электронам. В дальнейшем эта энергия рассеивается в результате упругих и неупругих столкновений электронов с нейтральными частицами и переносится за счет теплопроводности и конвекции. При средних давлениях в инертных газах, например, можно пренебречь электронной теплопроводностью и неупругими потерями энергии по сравнению с потерями за счет упругих столкновений. В работе [4] было показано, что энергия, переносимая потоком заряженных частиц на стенку, пренебрежимо мала. Поэтому с хорошей точностью можно считать, что в инертных газах почти вся вложенная электрическая энергия переходит в тепло. В молекулярных же газах непосредственно в тепло (за счет упругих столкновений электронов с молекулами) переходит не более 10 % вкладываемой мощности; большая часть вкладываемой энергии поступает в колебательные степени свободы молекул, из которых относительно медленно переходит в поступательные и вращательные степени свободы молекул (за счет *V-T* и *V-V*' – процессов). При записи уравнения для энтальпии газа будем пренебрегать вязкой диссипацией энергии, переносом энергии за счет излучения (ввиду низкой температуры газа T), изменением кинетической энергии газа, а также молекулярным переносом тепла вдоль оси разрядной трубки по сравнению с конвективным переносом энергии, с джоулевой диссипацией энергии электрического поля и переносом тепла в радиальном направлении за счет теплопроводности [5].

С учетом таких приближений уравнение для энтальпии газа имеет вид:

$$cc_p\frac{u}{R}\frac{\partial T}{\partial z}+cc_p\frac{v}{R}\frac{\partial T}{\partial r}=\frac{l}{R^2 r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+e м_e n_e E^2. \qquad (3)$$

Здесь c, c_p – плотность и удельная теплоемкость газа при постоянном давлении, *л* – коэффициент теплопроводности газа, T – температура газа, E – напряженность электрического тока, $м_e$ – подвижность электронов, е – абсолютная величина заряда электрона.

Закон Ома в интегральном виде имеет вид:

$$I = 2pem_e E R^2\int_0^1 n_e(r)rdr . \qquad (4)$$

Он связывает концентрацию электронов, напряженность электрического поля и величину тока. В (4) предполагается, что напряженность электрического поля и подвижность электронов постоянны вдоль радиальной координаты РК.

Решение системы уравнений при постоянной плотности газа.

Сделаем еще одно, довольно существенное приближение. А именно, будем считать (в нулевом приближении), что плотность газа в РК меняется незначительно. Это приближение является довольно грубым, так как известно, что в каждом поперечном сечении цилиндрической трубки давление газа не зависит от радиальной координаты, а температура T зависит от r, спадая от оси к стенкам трубки. С учетом данного приближения уравнение неразрывности для осесимметричного потока может быть записано в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv)=0\,, \tag{5}$$

Рассмотрим систему уравнений (1)-(5) для случая u = const. В этом случае из уравнения неразрывности следует, что v = 0. Тогда система уравнений будет иметь вид:

$$\frac{u}{R}\frac{\partial \bar{n}_e}{\partial z} = \frac{D_{ea}}{R^2 r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial \bar{n}_e}{\partial r}) + n_i \bar{n}_e\,, \tag{6}$$

$$н_i = бE^m, \tag{7}$$

$$I = 2pem_e E n_e(0{,}0)R^2\int_0^1 \bar{n}_e(r) r dr\,, \tag{8}$$

$$cc_p\frac{u}{R}\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{l}{R^2 r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial T}{\partial r}) + eм_e n_e E^2 \tag{9}$$

$$u = const.,\ v = 0, \tag{10}$$

Здесь $\bar{n}_e(r,z) = n_e(r,z)/n_e(0{,}0)$. Решение этой системы будем искать при следующих граничных условиях:

$$\bar{n}_e(r,0) = j_1(r)\,,\ \bar{n}_e(1,z) = 0\,, \partial\bar{n}_e(0,z)/\partial r = 0, \tag{11}$$

$$T(r,0)= T_o(r),\ T(1,z) = T_R,\ T_r(0,z) \equiv \partial T(0,z)/\partial r = 0,\ 0 \le r \le 1,\ z \ge 0. \tag{12}$$

Представим уравнение (6) в безразмерном виде:

$$Pe_d\frac{\partial \bar{n}_e}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial \bar{n}_e}{\partial r}) + b\bar{n}_e\ . \tag{13}$$

Здесь $b = n_i R^2/D_{ea}$, $Pe_d = uR/D_{ea}$. Величина b является сложной функцией z. Подстановка выражения для n_i из (7) в (6) и (8) показывает, что уравнения (6)-(8) являются сложной подсистемой нелинейных интегродифференциальных уравнений. Для ее решения может быть использован метод, примененный в работах [5, 6].

Сначала решается уравнение (13) при произвольном законе изменения b (z). Затем из этих решений выбирается то, которое удовлетворяет уравнениям (7), (8). Подстановка выражения $\bar{n}_e(r,z) = c(r)Z(z)$ в (13) дает:

$$\frac{Pe_d}{Z}\frac{dZ}{dz} - b(z) = \frac{1}{rc}\frac{d}{dr}(r\frac{dc}{dr}) = -K^2\,. \tag{14}$$

Из (14) получаем:

$$Pe_d\frac{dZ}{dz} - [b(z) - K^2]Z = 0\,, \tag{15}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dc}{dr}) + K^2 c = 0\,. \qquad (16)$$

Здесь функция $c(r)$ должна удовлетворять граничным условиям

$$c(1) = 0\,,\ \frac{dc}{dr}(0) = 0\,. \qquad (17)$$

Общим решением уравнения (16) является линейная комбинация

$$c(r) = C_1 J_0(kr) + C_2 K_0(kr), \qquad (18)$$

Поскольку при $r \to 0$ функция $K_0(kr) \to \infty$, то из условия конечности n_e на оси цилиндра следует положить $C_2 = 0$. Собственные значения k_n определяются из условия $c(1) = 0$ и представляют собой положительные корни уравнения $J_0(k) = 0$. Этих корней существует счетное множество, и каждому собственному значению k_n будет соответствовать собственная функция $J_0(k_n r)$.

Собственным значениям k_n соответствуют решения уравнения (15) вида

$$Z_n(z) = A_n exp\frac{1}{Pe_d}(\int_0^z b(z)dz - k_n{}^2 z)\,, \qquad (19)$$

где A_n – произвольные постоянные.

$$\overline{n}_e(r,z) = A_n J_0(k_n r)\, exp\frac{1}{Pe_d}(\int_0^z b(z)dz - k_n{}^2 z)\,, \qquad (20)$$

Таким образом, функции удовлетворяют уравнению (13) и последним двум из граничных условий (11). В силу линейности и однородности уравнения (13) линейная комбинация выражений типа (20) также будет решением уравнения (13). Таким образом, общее решение уравнения (13) может быть записано в виде:

$$\overline{n}_e(r,z)\ ) = \exp(\frac{1}{Pe_d}\int_0^z b(z)dz)\ \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(k_n r)\exp(-\frac{k_n{}^2 z}{Ped})\,. \qquad (21)$$

Из (11) и (21) следует, что

$$ц_1(r) = У\ A_n J_0(k_n r)\,. \qquad (22)$$

Как известно, функции Бесселя нулевого порядка $J_0(k_1 r)$, $J_0(k_2 r)$, ... , $J_0(k_n r)$ удовлетворяют условию ортогональности [7]:

$$\int_0^1 rJ_0(k_n r)J_0(k_m r)dr = \frac{1}{2}J_1{}^2(k_n)d_{nm}\,. \qquad (23)$$

С учетом (23) коэффициенты A_n определяются из (22) по формуле

$$A_n = \frac{2}{J_1{}^2(k_n)}\int_0^1 rJ_0(k_n r)j_1(r)dr\,. \qquad (24)$$

При определенных условиях, накладываемых на функцию $j_1(r)$, ряд (22) с коэффициентами A_n, определенными из (24), равномерно и абсолютно сходится к j_1(r) [8]. Так как 0 ‹ $exp(-k_n{}^2 z/Pe_d) \le 1$, то ряд

(21) также сходится абсолютно и равномерно. Таким образом, функция $\overline{n}_e(r,z)$, которая определяется из формул (21) и (24), дает решение уравнения (13) при произвольном законе изменения *в*(*E/N*, *z*).

Подстановка (21) в (9) приводит к нелинейному интегральному уравнению для напряженности электрического поля:

$$I = pe\mu_e n_e(0,0)R^2E(z)Q(z)\exp\left(\frac{1}{Pe_d}\int_0^z bE^m dz\right), \tag{25}$$

где $b = \beta R^2/D_{ea}$,

$$Q(z) = 2\sum_{n=1}^{\infty} k_n^{-1}A_nJ_1(k_n)\exp(-k_nz/Pe_d) \tag{26}$$

Логарифмируя выражение (25), получаем:

$$\ln\frac{I}{pe\mu_e n_e(0,0)R^2} = \ln E(z) + \ln Q(z) + \frac{1}{Pe_d}\int_0^z bE^m dz.$$

Дифференцируя обе части этого уравнения по *z*, приходим к уравнению

$$\frac{dE}{dz} + \frac{b}{Pe_d}E^{m+1} + \frac{1}{Q}\frac{dQ}{dz}E = 0$$

С помощью подстановки ш = E^{-m} приходим к линейному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{dy}{dz} - mш\frac{1}{Q}\frac{dQ}{dz} - \frac{bm}{Pe_d} = 0.$$

Решением этого уравнения является функция ш = $Q^m[Q_0^{-m}ш_0 + \frac{bm}{Pe_d}\int_0^z Q^{-m}dz]$.

Отсюда для напряженности электрического поля получаем формулу

$$E(z) = \left(\frac{bmQ^m}{Pe_d}\int_0^z Q^{-m}dz + \frac{Q^m}{E_0{}^m Q_0{}^m}\right)^{-\frac{1}{m}}. \tag{27}$$

Из (21), (25), (27) получаем:

$$\overline{n}_e(r,z) = \frac{I\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_nJ_0(k_nr)\exp(-k_n{}^2z_d)}{R^2Q(z)E(z)n_e(0,0)p\mu_e}. \tag{28}$$

С учетом приближенного соотношения $I = pe\mu_e n_e(0,0)R^2E_0Q_0$ формулу (28) можно привести к виду:

$$\overline{n}_e(r,z) = \left(1+\frac{bmQ_0{}^mE_0{}^m}{Pe_d}\int_0^z Q^{-m}dz\right)^{\frac{1}{m}}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} A_nJ_0(k_nr)\exp\left(-\frac{k_n{}^2z}{Pe_d}\right). \tag{29}$$

Средняя по поперечному сечению трубки безразмерная концентрация электронов определяется по формулам:

$$\overline{n}_{e,av} = 2\int_0^1 \overline{n}_e(r,z)rdr = \frac{I}{pem_e n_e(0,0)R^2E(z)} = \frac{E_0Q_0}{E(z)}. \tag{30}$$

Из (27) следует, что с ростом z напряженность электрического поля $E(z)$ стремится к конечному пределу. Это видно из того, что $E_\infty^m = \lim E^m$ представляет собой неопределенность типа ∞/∞. Применение правила Лопиталя, с учетом выражения для $Q(z)$, дает:

$$E_\infty = \left(\frac{k_1^2 D_{ea}}{aR^2}\right)^{\frac{1}{m}}. \tag{31}$$

Из (28) с учетом (31) для предельного распределения концентрации электронов по радиусу получаем:

$$\overline{n}_{e,\infty}(r) = \frac{IJ_0(k_1r)}{2pem_eJ_1(k_1)}\left(\frac{k_1^{m-2}a}{R^{2(m-1)}D_{ea}}\right)^{\frac{1}{m}}\frac{1}{n_e(0,0)}. \tag{32}$$

Это выражение можно записать также в виде:

$$\overline{n}_{e,\infty}(r) = J_0(k_1r)\frac{k_1E_0Q_0}{2E_\infty J_1(k_1)}. \tag{33}$$

В частном случае $\psi_1(r) = J_0(k_1r)$ расчетные формулы для напряженности электрического поля и концентрации электронов примут вид:

$$E(z) = E_0\left[1+\left(\frac{E_\infty^{\ m}}{E_0^{\ m}}-1\right)\exp\left(-mk_1^{\ 2}\frac{z}{P_{ed}}\right)\right]^{\frac{1}{m}}, \tag{34}$$

$$\overline{n}_e(r,z) = J_0(k_1r)\frac{E_0Q_0k_1}{2E(z)J_1(k_1)} = J_0(k_1r)\frac{E_0}{E(z)}. \tag{35}$$

Таким образом, из решения уравнений (7-9) получаются формулы для напряженности электрического поля (27) и концентрации электронов (28), (29), а также предельное значение E (31) и предельная концентрация $n_{e,\infty}$ (32), (33). В частном случае $Pe_d \to 0$ и $m = 2$ выражение для E_∞ совпадает с известной формулой для ПС ТР без потока газа.

Собственные значения k_n возрастают с ростом n. Поэтому с ростом z члены ряда (26) с $n > 1$ быстро убывают. Расчеты показывают, что при $z > 0{,}12\ Pe_d$ ряд (26) отличается от своего первого члена не более, чем на 1%. Поэтому в практических расчетах можно ограничиться первым членом ряда. Учитывая структуру выражений (27) и (28), можно заключить, что при $z \geq 0.12\ Pe_d$ для инженерных расчетов $E(z)$ и $n_e(z)$ можно использовать формулы (34) и (35).

Полученные формулы (27) и (28) необходимо использовать при решении уравнения (3) для энтальпии нейтральной компоненты газа. Запишем уравнение (3) в виде:

$$Pe\frac{\partial q}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial q}{\partial r}\right) + \frac{R^2E^2em_en_e}{l}, \tag{36}$$

где $Pe = uR/a$, $u = T - T_R$, a – коэффициент температуропроводности. Граничные условия для функции и имеют вид:

$$q(r,0) = T_0(r) - T_R = q_0(r),\ q(1,z) = 0\,,\ \frac{\partial q}{\partial r}(0,z) = 0 \qquad (37)$$

Для решения уравнения (36) воспользуемся конечным интегральным преобразованием Ханкеля по переменной r [8]:

$$q(k_i, z) = \int_0^1 q(r,z) J_0(k_i r) r dr \qquad (38)$$

Переход от изображения $u(k_i, z)$ к оригиналу $u(r, z)$ осуществляется по формуле:

$$q(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_0(k_i r)}{J_1^{\,2}(k_i)} q(k_i, z) \qquad (39)$$

Применение преобразования (38) к дифференциальному уравнению (36) дает:

$$Pe\frac{\partial q}{\partial z} = -k_i^{\,2} q + \frac{e m_e R^2}{l} \int_0^1 n_e(r) E^2 J_0(k_i r) r dr \qquad (40)$$

Граничное условие при $z = 0$ для уравнения (40) имеет вид:

$$q(k_i, 0) = \int_0^1 q(r,0) J_0(k_i r) r dr \qquad (41)$$

Рассмотрим второй член в правой части уравнения (40). Подставляя в него выражения для $E(z)$ и $n_e(r,z)$, получим:

$$S_i = \frac{e m_e R^2}{l} \int_0^1 n_e(r) r J_0(k_i r) E^2 dr = \frac{IE(z)}{l\,pQ(z)} \int_0^1 J_0(k_i r)\left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(k_n r) \exp\left(-k_n^{\,2} z_d\right)\right] dr \qquad (42)$$

Ряд в квадратных скобках при $z › 0$ сходится равномерно по r, поэтому порядок суммирования и интегрирования в (42) можно изменить. Это дает:

$$S_i = \frac{IE(z)}{l\,pQ(z)} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(-k_n^{\,2} z_d\right) \int_0^1 J_0(k_i r) J_0(k_n r) r dr \qquad (43)$$

Отсюда с учетом свойства ортогональности функций Бесселя, находим:

$$S_i = \frac{IE_\infty k_i J_1^{\,2}(k_i)}{4\,l\,p}\left[1 + \left(\frac{E_\infty^{\,m}}{E_0^{\,m}} - 1\right)\exp\left(-m k_1^{\,2} z_d\right)\right]^{\frac{1}{m}} \qquad (44)$$

Подстановка выражения (44) в решение уравнения (40) дает:

$$q = \exp\left(-\,l_i^{\,2}\frac{z}{p_e}\right)\left[\int_0^1 q(r,0) J_0(k_i r) r dr + \frac{k_i J_1^{\,2}(k_i) p_i IE_\infty}{4\,l\,p}\right] \qquad (45)$$

Здесь

$$p_i = \frac{1}{p_e}\int_0^z \left[1+\left(\frac{E_\infty{}^m}{E_0{}^m}-1\right)\exp\left(-m\,l_1{}^2 z_d\right)\right]^{\frac{1}{m}} \exp\left(k_j{}^2\,\frac{z}{p_e}\right)dz \qquad (46)$$

Из (39) и (45) находим формулу для расчета искомой функции u:

$$q(r,z) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i W_i J_0(k_i r) + \frac{IE_\infty}{2\,l\,p}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{k_i p_i W_i J_0(k_i r)}{J_1(k_i)}\,, \qquad (47)$$

где

$$B_i = \frac{2}{J_1{}^2(k_i)}\int_0^1 q(r,0)J_0(k_i r)rdr \qquad (48)$$

Зная температурное поле нейтральных частиц, можно вычислить их среднемассовую температуру в поперечном сечении трубки и плотность теплового потока у стенки:

$$q_c(z) = 2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{B_i W_i J_1(k_i)}{k_i} + \frac{IE_\infty}{l\,p}\sum_{i=1}^{\infty} p_i W_i \qquad (49)$$

$$2pRq_R = 2\,l\,p\sum_{i=1}^{\infty} k_i B_i W_i J_1(k_i) + IE_\infty \sum_{i=1}^{\infty} k_i{}^2 p_i W_i \qquad (50)$$

Для вычисления числа Нуссельта используем формулу $Nu = -\frac{2}{qc}\frac{\partial q}{\partial r}\Big|_{r=1}$. Подставляя в эту формулу выражения для u_c и $\frac{\partial q}{\partial r}\Big|_{r=1}$, находим:

$$Nu = \frac{2\,l\,p\sum_{i=1}^{\infty} k_i B_i W_i J_1(k_i) + IE_\infty\sum_{i=1}^{\infty} k_i p_i W_i}{2\,l\,p\sum_{i=1}^{\infty} l_i{}^{-1} B_i W_i J_1(k_i) + IE_\infty\sum_{i=1}^{\infty} p_i W_i} \qquad (51)$$

Полученные в этой статье формулы (27)-(29) и (47)-(51) позволяют рассчитывать тепловые и электрические характеристики ПС ТРП, их зависимость от физических свойств и расхода газа, граничных условий для $n_e(r,z)$ и $T(r,z)$, размеров РК и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубев В.С., Сафиуллин Р.К. Применение мощных CO_2-лазеров для обработки материалов и изделий. // Известия КГАСУ, 2009, № 1 (11). – С. 237-242.
2. Митчнер М., Кругер Ч. Частично ионизованные газы. – М.: Мир, 1978. – 496 с.
3. Баранов В.Ю., Веденов А.А., Низьев В.Г. Электрический разряд в потоке газа. // Теплофизика высоких температур, 1972, 10, № 6. – С. 1156-1159.
4. Новгородов М.З. Экспериментальное исследование электрических и оптических характеристик положительного столба тлеющего разряда в молекулярных газах. // Труды ФИАН СССР, 1974, 78. – С. 60-116.

5. Даутов Г.Ю. Теоретическое исследование столба дуги в канале с потоком газа. // В кн.: Генераторы низкотемпературной плазмы. – М.: Энергия, 1969. – С. 4-21.
6. Сафиуллин Р.К. Математическое моделирование процессов в низкотемпературной плазме тлеющего разряда применительно к CO_2- и CO-лазерам. // Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. – Казань: КГАСУ, 2006.
7. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. – М: Наука, 1969. – 288 с.
8. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М: Высшая школа, 1967. – 600 с.

REFERENCES

1. Golubev V.S., Safiullin R.K. Application of High Power CO_2 Lasers for Processing of Materials and Manufactures. // Izvestija of KGASU, 2009, № 1 (11). – P. 237-242.
2. Mitchner M., Kruger Ch. H., Jr. Partially Ionized Gases. M.: Mir, 1976, – 496 p.
3. Baranov V.Yu, Vedenov A.A., Nizjev V.G. Electric Discharge in Gas Flow. // Teplophysica Vysokich Temperatur, 1972, V. 10, № 6. – P. 1156-1159.
4. Novgorodov M.Z. Experimental Investigation of Electric and Optic Characteristics of Glow Discharge Positive Column in Molecular Gases / Works (Trudy) of Lebedev Physical Institute of Academy of Sciences of the USSR. 1974, V. 78. – P. 60-116.
5. Dautov G. Yu. Theoretical Investigation of Electric Arc Column in Gas Flow Channel. In; Low Temperature Plasma Generators. – M.: Energy, 1969, – P. 4-21.
6. Safiullin R.K. Mathematical Simulation of the Processes in Low Temperature Plasma of Glow Discharge in Connection with CO_2 and CO lasers. // Doctor Dissertation. – Kazan, 2006.
7. Aramanovich I.G., Levin V.I. Equations of Mathematical Physics. – M.: Nauka, 1969. – 288 p.
8. Lykov A.V. The Theory of Heat Conductivity. – M.: Vysshaja Schola, 1967. – 600 p.